Блок 1. Системы уравнений

Интернет-карусель 2020-2021. Задания

1. Миша, Петя и Вася покрасили забор, каждый — целиком несколько досок. Миша и Петя в сумме покрасили 23 доски забора, Миша и Вася — 31, Петя и Вася — 30 досок. Какова длина забора (в досках)?

2. (а) В каждой вершине треугольной пирамидки записано число. На каждой грани подсчитали сумму чисел в её вершинах. Получили на гранях суммы 49, 53, 55 и 59. Каково наибольшее из чисел, записанных в вершинах?

   (б) На каждом из 6 ребер треугольной пирамидки записано число. На каждой грани подсчитали сумму чисел на ребрах, являющимися сторонами этой грани. Получили на гранях суммы 49, 53, 55 и 59. Можно ли определить числа, записанные на ребрах?

3. На доске написано 13 последовательных натуральных чисел. Записали суммы в каждой из пар этих чисел в порядке возрастания. Вторая сумма в этом ряду равна 76. Чему равна предпоследняя сумма в этом ряду?

4. На каждом ребре куба записаны натуральные числа, среди которых нет равных. В каждой вершине подсчитали сумму чисел на ребрах, которые выходят из этой вершины. Получили в вершинах суммы 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24. Каково наибольшее из чисел, записанных на ребрах?

5. У Пети, Васи и Коли есть яблоки. Они решили поделиться ими с Машей. Если Петя отдаст половину своих яблок Маше, то у ребят будет вместе 47 яблок; если половину своих отдаст Вася — будет 45, если половину своих отдаст Коля — 43. В итоге ребята решили, что Маше отдаст половину яблок тот, у кого их больше. Сколько яблок дали Маше?

6. У второклассника Митрофана в тетради записано четырёхзначное число. В качестве домашнего задания он должен был найти произведения всех троек цифр этого числа. Он правильно выполнил задание, получив произведения 20, 28, 35 и 140. Найдите самое большое четырехзначное число, которого могло быть в тетради Митрофана.

7. Числа x, y решение системы $\begin{cases} 4x^2 + 4y = -7 \\ y^2 - 2 = 4x \end{cases}$. Найдите значение суммы $x + y$.

8. Художники Амедео и Пабло везли на выставку свои картины с целью их продать. Организатор выставки берет за участие в выставке каждой картины одинаковую плату. При продаже цена за каждую картину фиксирована.

   Пабло предложил взять плату картинами (по цене продажи): «Амедео должен отдать тебе 19 картин, но он переплатит тебе 1 франк. Я должен тебе 3 картины и 1 франк в придачу. У меня совсем нет денег, но этот франк можно взять из переплаты моего

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

друга». Так и договорились. За сколько франков продаётся картина, если Амедео привез на выставку 104 картины, а Пабло — только 17?

9. За круглым столом сидят Артур и 9 рыцарей. Каждый из них (включая Артура) сказал количество своих вассалов двум своим соседям. После этого все по очереди (в том порядке, в котором сидели, начиная с Артура) вслух произнесли среднее арифметическое тех двух чисел, которые ему сообщили: 5, 6, 7, …, 14. Сколько вассалов у рыцаря, назвавшего число 10?

10. Найдите сумму $x + y$, если выполнено $x^4y^6 = 16$, $x^6y^4 = 64$.

11. На доске написано три последовательных натуральных числа. Записали три суммы в каждой из пар этих чисел. Две суммы равны 113 и 114. Чему равна третья сумма?

12. Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162. Найдите это двузначное число.

13. Найдите x, если выполнено $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 11; \\ xy + xz + yz = 7; \\ x + y = 4. \end{cases}$

14. После карантина учительница литературы спросила учеников математического класса Алешу, Веру, Петю, Нину и Семена, кто сколько книг прочитал. Но каждый назвал, сколько книг прочитали остальные четверо. Алеша назвал число 46, Вера — 47, Петя — 44, Нина — 40, Семен — 34. Четверо произнесли верные числа, а один из них ошибся на 1. Какое число ошибочное?

15. Найдите значение y, если выполнено $\begin{cases} x^3 - y^3 = -35; \\ x^2y - xy^2 = 30. \end{cases}$

Блок 1. Системы уравнений

Интернет-карусель 2020-2021. Указания, ответы, решения

Почти все задачи используют прием суммирования (или перемножения) данных в условии величин. При решении некоторых задач требуется умение свернуть квадрат выражения и использовать другие формулы сокращенного умножения.

Полезно рассмотреть как арифметические решения, так и их запись с помощью систем уравнений. Примеры этого приведены в решениях некоторых из задач.

1. Миша, Петя и Вася покрасили забор, каждый — целиком несколько досок. Миша и Петя в сумме покрасили 23 доски забора, Миша и Вася — 31, Петя и Вася — 30 досок. Какова длина забора (в досках)?

   Ответ: 42.

   Указание: (23 + 31 + 30) : 2 = 42.

   Решение. В сумму 23 + 31 + 30 = 84 вклад каждого мальчика в результат входит дважды. Поэтому, забор состоит из 84 : 2 = 42 досок.

2. (а) В каждой вершине треугольной пирамидки записано число. На каждой грани подсчитали сумму чисел в её вершинах. Получили на гранях суммы 49, 53, 55 и 59. Каково наибольшее из чисел, записанных в вершинах?

   Ответ: 23.

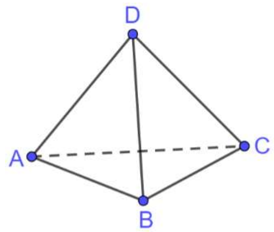
   Указание: в вершинах записаны числа 13, 17, 19, 23.

   Решение. В сумму 49 + 53 + 55 + 59 = 216 каждое число в вершине входит 3 раза. Значит, сумма всех чисел в вершинах равна 216 : 3 = 72. Чтобы найти число в вершине, нужно из общей суммы вычесть сумму чисел на противоположной грани. Значит, в вершинах расположены числа 72 – 49 = 23, 72 – 53 = 19, 72 – 55 = 17, 72 – 59 = 13. Самое большое из них — 23.

   (б) На каждом из 6 ребер треугольной пирамидки записано число. На каждой грани подсчитали сумму чисел на ребрах, являющимися сторонами этой грани. Получили на гранях суммы 49, 53, 55 и 59. Можно ли определить числа, записанные на ребрах?

   Ответ: нельзя.

   Решение. Во-первых, можно подобрать один пример расположения чисел на ребрах, удовлетворяющий условию.



Пусть на ребрах нижнего основания сумма 49, на ребре AB — 16, на ребре BC — 16, на ребре CA — 17. Если на AD число a, сумма на ABD равна 55, то на BD число 55 – 16 – a = 39 – a. Сумма на BCD равна 53, тогда число на CD равно 53 – 16 – (39 – a) = a – 2. Так как на CAD сумма 59, получаем уравнение a + (a – 2) + 17 = 59, откуда a = 44.

Вывод: расстановка чисел, на ребрах, удовлетворяющая условию, существует. Покажем, что таких расстановок бесконечно много.

Заметим, если числа на двух противоположных ребрах (например, на AB и CD) увеличить на число n, то суммы на всех гранях увеличатся на n. Если после этого на двух других противоположных ребрах (например, на BC и AD) уменьшить на число n, то суммы на гранях уменьшатся на n и станут первоначальными.

Вывод: число на любом ребре может быть любым, для него существует расстановка чисел на других ребрах, удовлетворяющая условию.

3. На доске написано 13 последовательных натуральных чисел. Записали суммы в каждой из пар этих чисел в порядке возрастания. Вторая сумма в этом ряду равна 76. Чему равна предпоследняя сумма в этом ряду?

   Ответ: 96.

   Указание: даны числа 37, 38, 39, …, 47, 48, 49.

   Решение. Пусть написаны числа $n, n+1, n+2, \dots, n+10, n+11, n+12$. Заметим, что минимальная сумма $n+(n+1)$, следующая за ней — $n+(n+2)$, максимальная — $(n+11)+(n+12)$, предыдущая перед ней — $(n+10)+(n+12)$. Из условия $n+(n+2)=76, n=37$. Искомая сумма $(n+10)+(n+12)=47+49=96$.

4. На каждом ребре куба записаны натуральные числа, среди которых нет равных. В каждой вершине подсчитали сумму чисел на ребрах, которые выходят из этой вершины. Получили в вершинах суммы 16, 17, 18, 19, 20, 21, 23, 24. Каково наибольшее из чисел, записанных на ребрах?

   Ответ: 13.

   Решение. Сумма всех данных чисел в вершинах равна 158. Каждое число на ребре входит в неё дважды (в обе суммы на концах ребра). Значит, сумма всех чисел на ребрах равна 158 : 2 = 79.

   Сумма 12 различных натуральных чисел равна 79. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78, значит, на ребрах числа от 1 до 11 и число 13.

5. У Пети, Васи и Коли есть яблоки. Они решили поделиться ими с Машей. Если Петя отдаст половину своих яблок Маше, то у ребят будет вместе 47 яблок; если половину своих отдаст Вася — будет 45, если половину своих отдаст Коля — 43. В итоге ребята решили, что Маше отдаст половину яблок тот, у кого их больше. Сколько яблок дали Маше?

Ответ: 11.

Указание: Петя — 14, Вася — 18, Коля — 22, всего — 54.

Решение 1 (арифметическое). В сумму 47 + 45 + 43 = 135 количество яблок каждого мальчика сходит 2,5 раза. Поэтому, у них всего 135 : 2,5 = 54 яблока. Больше всего — у Коли (когда он отдал, сумма уменьшилась на большую величину). Значит, он отдал Маше 54 – 43 = 11 яблок.

Решение 2 (система уравнений). Пусть у Пети было $2a$ яблок, у Васи — $2b$ яблок, у Коли — $2c$ яблок. Тогда из условия следует система:

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 47 \\ 2a + b + 2c = 45 \\ 2a + 2b + c = 43 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получаем $5a + 5b + 5c = 135$, откуда $2a + 2b + 2c = 54$. Маше дали a, b или c яблок, $a = 54 - 47 = 7, b = 54 - 45 = 9, c = 54 - 43 = 11$. Так как c — наибольшее, то Маше дали 11 яблок.

6. У второклассника Митрофана в тетради записано четырёхзначное число. В качестве домашнего задания он должен был найти произведения всех троек цифр этого числа. Он правильно выполнил задание, получив произведения 20, 28, 35 и 140. Найдите самое большое четырехзначное число, которого могло быть в тетради Митрофана.

Ответ: 7541.

Решение. Пусть x, y, z, t — цифры искомого числа. Из условия $xyz = 140$, $yzt = 20$, $xyt = 35$, $xzt = 28$. Далее можно найти цифры, рассуждая по-разному.

Способ 1 (делимость). Среди цифр x, z, t нет цифры 5. Но все произведения с y делятся на 5, значит, $y = 5$. Зная это, упрощаем условие: $xz = 28$, $zt = 4$, $xt = 7$, $xzt = 28$. Так как $xzt = xz = 28$, то $t = 1$. Упрощаем снова: $z = 4, x = 7$.

Способ 2 (система). Перемножим уравнения системы:
$(xyzt)^3 = (7 \cdot 2^2 \cdot 5) \cdot (2^2 \cdot 5) \cdot (5 \cdot 7) \cdot (7 \cdot 2^2), xyzt = 7 \cdot 5 \cdot 2^2$.
Теперь, поочередно поделив последнее равенство на уравнения системы, найдем $x = 7,\ y = 5,\ z = 4,\ t = 1$.

Значит, указанным свойством обладают все четырехзначные числа, записанные с помощью этих цифр в каком-то порядке. Наибольшее из них 7541.

7. Числа x, y решение системы $\begin{cases} 4x^2 + 4y = -7 \\ y^2 - 2 = 4x \end{cases}$. Найдите значение суммы $x + y$.

Ответ: –1,5.

Указание: решение системы — (0,5; –2)

Решение. Сложим уравнения системы и преобразуем:
$4x^2 + 4y + y^2 - 2 = -7 + 4x$,
$4x^2 - 4x + 1 + y^2 + 4y + 4 = 0$,
$(2x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$.

Из последнего следует, что $2x - 1 = 0, y + 2 = 0$, откуда $x = 0{,}5, y = -2$. Искомая величина равна $x + y = -1{,}5$.

8. Художники Амедео и Пабло везли на выставку свои картины с целью их продать. Организатор выставки берет за участие в выставке каждой картины одинаковую плату. При продаже цена за каждую картину фиксирована.

Пабло предложил взять плату картинами (по цене продажи): «Амедео должен отдать тебе 19 картин, но он переплатит тебе 1 франк. Я должен тебе 3 картины и 1 франк в придачу. У меня совсем нет денег, но этот франк можно взять из переплаты моего друга». Так и договорились. За сколько франков продаётся картина, если Амедео привез на выставку 104 картины, а Пабло — только 17?

Ответ: 9.

Решение. Пусть картина стоит x франков, а плата за участие картины в выставке стоит y франков. За картины, которыми заплатили за участие, плата за участие не взимается, так как художники на выставке их не продавали.

Из условия следует система:

$$\begin{cases} 19x = (104 - 19)y + 1 \\ 3x = (17 - 3)y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 19x = 85y + 1 \\ 3x = 14y - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 2 \end{cases}$$

Картина стоила 9 франков.

9. За круглым столом сидят Артур и 9 рыцарей. Каждый из них (включая Артура) сказал количество своих вассалов двум своим соседям. После этого все по очереди (в том порядке, в котором сидели, начиная с Артура) вслух произнесли среднее арифметическое тех двух чисел, которые ему сообщили: 5, 6, 7, …, 14. Сколько вассалов у рыцаря, назвавшего число 10?

Ответ: 5.

Решение 1 (арифметика). Пронумеруем сидящих за столом: пусть № 1 получил сумму 2 · 5 = 10, № 2 — сумму 12, …, № 6 — сумму 20, …, № 10 — сумму 28. Нужно найти число, которое назвал № 6.

Сидящие с нечётными номерами (№ 1, № 3, № 5, № 7 и № 9) в сумме назвали 10 + 14 + 18 + 22 + 26 = 90. В неё числа остальных (с чётными номерами) входят дважды, значит, сумма чисел сидящих с чётными номерами равна 90 : 2 = 45.

Сидящие с номерами № 1, № 5 и № 7 в сумме назвали 10 + 18 + 22 = 50. В неё числа сидящих с чётными номерами входят 1 раз, кроме № 6, число которого входит дважды. Значит, № 6 назвал число 50 – 45 = 5.

Решение 2 (уравнение). Пусть № 6 назвал число n.
Так как № 5 получил сумму 18, то № 4 назвал $18-n$.
Так как № 3 получил сумму 14, то № 2 назвал $14-(18-n)=n-4$.
Так как № 1 получил сумму 10, то № 10 назвал $10-(n-4)=14-n$.
Так как № 9 получил сумму 26, то № 8 назвал $26-(14-n)=n+12$.
Так как № 7 получил сумму 22, то $n+(n+12)=22$, откуда $n=5$.

10. Найдите сумму $x+y$, если выполнено $x^4y^6=16$, $x^6y^4=64$.

Ответ: –3, –1, 1, 3.

Указание. Подходят следующие пары $(x;y)$: (1; 2), (–1; 2), (1; –2), (–1; –2).

Решение. Перемножим данные соотношения и получим:
$x^4y^6\cdot x^6y^4=(xy)^{10}=16\cdot 64=2^{10}$.

Тогда $xy=\pm 2$. Получаем:
$x^4y^6=(\pm 2)^4\cdot y^2=16y^2=16, y^2=1, y=\pm 1;$
$x^6y^4=(\pm 2)^4\cdot x^2=16x^2=64, x^2=4, x=\pm 2.$

Подходят следующие пары $(x;y)$: (1; 2), (–1; 2), (1; –2), (–1; –2). В этих случаях сумма $x+y$ равна 3, 1, –1 и –3.

11. На доске написано три последовательных натуральных числа. Записали три суммы в каждой из пар этих чисел. Две суммы равны 113 и 114. Чему равна третья сумма?

Ответ: 115.

Решение. Если записаны $n, n+1, n+2$, то их попарные суммы равны $2n+1$, $2n+2$, $2n+3$. Четная только вторая сумма, значит, $2n+2=114$, $n=56$. Значит, даны числа 56, 57 и 58, не хватает суммы 57 + 58 = 115.

12. Сумма кубов цифр двузначного числа равна 243, а произведение суммы его цифр на произведение цифр этого числа равно 162. Найдите это двузначное число.

Ответ: 36 или 63.

Решение. Пусть a, b — цифры искомого числа, $a^3+b^3=243$, $(a+b)ab=162$.

Сложим первое уравнение с утроенным вторым и получим:
$a^3+b^3+3(a^2b+ab^2)=243+3\cdot 162=729$,
$(a+b)^3=9^3$,

$a+b=9$.

Тогда $a=9-b$, $(a+b)ab=9b(9-b)=162$, $b^2-9b+18=0$. Корни последнего уравнения равны 3 и 6, откуда $a=6$ или $a=3$, $b=3$ или $b=6$.

Замечание. Из соотношения $(a+b)ab=162$ следует, что цифры a, b — делители числа $162=2\cdot 3^4$. Перебором можно показать, что это возможно только если цифры — 3 и 6.

13. Найдите x, если выполнено $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=11; \\ xy+xz+yz=7; \\ x+y=4. \end{cases}$

Ответ: 1 или 3.

Указание: решения системы — (1, 3, 1), (3, 1, 1).

Решение. Сложим первое уравнение с удвоенным вторым:
$x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)=11+2\cdot 7$,
$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=25$,
$(x+y+z)^2=5^2$,
$x+y+z=\pm 5$.

Учитывая третье уравнение системы, имеем $4+z=\pm 5$, откуда $z=1$ или $z=-9$. Подставим эти значения в систему.

Если $z=1$, то

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy+x+y=7 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy+4=7 \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10 \\ xy=3 \\ x+y=4 \end{cases}$$

Тогда $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy=10-6=4$, $x-y=\pm 2$. Прибавив к последнему $x+y=4$, получаем $2x=2$ или $2x=6$, $x=1$ или $x=3$.

Если $z=-9$, то

$$\begin{cases} x^2+y^2=-70 \\ xy-9x-9y=7 \\ x+y=4 \end{cases}$$

что невозможно, так как $x^2+y^2\geq 0$.

14. После карантина учительница литературы спросила учеников математического класса Алешу, Веру, Петю, Нину и Семена, кто сколько книг прочитал. Но каждый назвал, сколько книг прочитали остальные четверо. Алеша назвал число 46, Вера — 47, Петя — 44, Нина — 40, Семен — 34. Четверо произнесли верные числа, а один из них ошибся на 1. Какое число ошибочное?

Ответ: 34, 40, 44, 46 или 47 (ошибиться мог любой).

Решение. Если бы все числа были названы верно, то в их сумму количество книг, прочитанных каждым, входит 4 раза. Верная сумма отличается от суммы 46 + 47 + 44 + 40 + 34 = 211 на 1 и делится (без остатка) на 4. Значит, она равна 212, кто-то уменьшил свою верную сумму на 1, а всего прочитано 212 : 4 = 53 книги.

Не трудно проверить, что если у любого из ребят увеличить названное число на 1, то можно найти, сколько книг прочитал каждый: Алеша — 53 – 46 = 7, Вера — 53 – 47 = 6, Петя — 53 – 44 = 9, Нина — 53 – 40 = 13, Семен — 53 – 34 = 19 и одну книгу еще кто-то из них (он же и ошибся).

15. Найдите значение y, если выполнено $\begin{cases} x^3 - y^3 = -35; \\ x^2y - xy^2 = 30. \end{cases}$

Ответ: 2, 3

Указание: решения системы — (−2; 3) и (−3; 2).

Решение. Вычтем из первого уравнения утроенное второе:
$x^3 - y^3 - 3(x^2y - xy^2) = -35 - 3 \cdot 30,$
$(x-y)^3 = -125,$
$x - y = -5.$

Из второго уравнения имеем $x^2y - xy^2 = xy(x-y) = -5xy = 30, xy = -6.$

Из первого уравнения:
$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2) = -5(x^2 + xy + y^2) = -35,$
$x^2 + xy + y^2 = 7,$
$x^2 + 2xy + y^2 = 7\text{-}6 = 1,$
$(x+y)^2 = 1,$
$x + y = \pm 1.$

Вычитая из суммы разность, имеем $(x+y) - (x-y) = 2y = \pm 1 - (-5) = 5 \pm 1$, откуда $y = 2$ или $y = 3$.