Блок 6. Квадратные уравнения

Интернет-карусель (2020-2021). Условия

1. Найдите больший из корней уравнения $x^2 + 4x - 2021 = 0$.
2. Сколько точек с целыми координатами расположено на координатной прямой между корнями уравнения $x^2 - 4x - 2021 = 0$?
3. Число $20 + \sqrt{21}$ — корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, где a, b — целые числа. Найдите $a + b$.
4. Число $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ — корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, где a, b — целые числа. Найдите $a + b$.
5. Простые числа p, q таковы, что уравнение $x^2 + 3px - 7q = 0$ имеет два корня, являющихся целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение суммы $p + q$.
6. Числа a, b — корни уравнения $x^2 - \left(\sqrt{6} + \sqrt{15}\right) + 3\sqrt{10} = 0$, $a < b$. Найдите $a^2 + 2b^2$.
7. Число $(a^2 + b^2)^2$ — корень уравнения $x^2 - 4a^2b^2x = 4$. Найдите значение выражения $a^4 - b^4$.
8. При каком значении a оба корня уравнения $x^2 + 7x + 5 = 0$ являются корнями уравнения $x^3 = 44x + a$?
9. От прямоугольного листа бумаги площади 342 отрезали квадрат. Оставшаяся часть — прямоугольник периметра 57. Найдите площадь отрезанного квадрата.
10. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если сумма катетов равна 1057, а площадь треугольника равна 22770.
11. При каком значении a корни квадратного уравнения $ax^2 + 12x + 9a = 0$ совпадают?
12. Найдите положительный корень уравнения $\sqrt{x^2 - 2021} = x^2 - 2023$.
13. В шахматном турнире школы участвовали 57 учеников, среди которых мальчиков больше, чем девочек. Каждые двое сыграли ровно одну партию. Известно, что партий между участниками одного пола было на 56 больше, нежели партий между мальчиком и девочкой. Сколько мальчиков участвовало в турнире?
14. При каком наименьшем натуральном числе a уравнение $x^2 + 7x + 2021 - a = 0$ имеет действительный корень?
15. В выпуклом n-угольнике $n + 432$ диагоналей. Чему равно n?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

Блок 6. Квадратные уравнения

Интернет-карусель (2020-2021). Условия

1. Найдите больший из корней уравнения $x^2 + 4x - 2021 = 0$.
2. Сколько точек с целыми координатами расположено на координатной прямой между корнями уравнения $x^2 - 4x - 2021 = 0$?
3. Число $20 + \sqrt{21}$ — корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, где a, b — целые числа. Найдите $a + b$.
4. Число $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ — корень уравнения $x^2 + ax + b = 0$, где a, b — целые числа. Найдите $a + b$.
5. Простые числа p, q таковы, что уравнение $x^2 + 3px - 7q = 0$ имеет два корня, являющихся целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение суммы $p + q$.
6. Числа a, b — корни уравнения $x^2 - \left(\sqrt{6} + \sqrt{15}\right) + 3\sqrt{10} = 0$, $a < b$. Найдите $a^2 + 2b^2$.
7. Число $(a^2 + b^2)^2$ — корень уравнения $x^2 - 4a^2b^2x = 4$. Найдите значение выражения $a^4 - b^4$.
8. При каком значении a оба корня уравнения $x^2 + 7x + 5 = 0$ являются корнями уравнения $x^3 = 44x + a$?
9. От прямоугольного листа бумаги площади 342 отрезали квадрат. Оставшаяся часть — прямоугольник периметра 57. Найдите площадь отрезанного квадрата.
10. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если сумма катетов равна 1057, а площадь треугольника равна 22770.
11. При каком значении a корни квадратного уравнения $ax^2 + 12x + 9a = 0$ совпадают?
12. Найдите положительный корень уравнения $\sqrt{x^2 - 2021} = x^2 - 2023$.
13. В шахматном турнире школы участвовали 57 учеников, среди которых мальчиков больше, чем девочек. Каждые двое сыграли ровно одну партию. Известно, что партий между участниками одного пола было на 56 больше, нежели партий между мальчиком и девочкой. Сколько мальчиков участвовало в турнире?
14. При каком наименьшем натуральном числе a уравнение $x^2 + 7x + 2021 - a = 0$ имеет действительный корень?
15. В выпуклом n-угольнике $n + 432$ диагоналей. Чему равно n?

karusel.desc.ru ~ 139 ~

Блок 6. Квадратные уравнения

Интернет-карусель (2020-2021). Ответы, указания, решения

Задания интернет-карусели посвящены квадратным уравнениям. Помимо поиска корней через дискриминант, в решениях показано, когда удобно использовать теорему Виета. В задачах № 3 и № 4 нужно использовать свойства иррациональных и рациональных чисел, в задаче № 5 — свойства делимости целых чисел и остатков.

1. Найдите больший из корней уравнения $x^2+4x-2021=0$.

   Ответ: 43.

   Решение. В 2021 году полезно знать, что $2021 = 43 \cdot 47$. Так как $-4 = -47 + 43$, $-2021 = 43 \cdot (-47)$, то по обратной теореме Виета корни уравнения -47 и 43. Больший корень равен 43.

2. Сколько точек с целыми координатами расположено на координатной прямой между корнями уравнения $x^2-4x-2021=0$?

   Ответ: 89.

   Решение. Так как $4 = 47 + (-43)$, $-2021 = (-43) \cdot 47$, то по обратной теореме Виета корни уравнения -43 и 47. Между ними 42 отрицательных целых числа, число 0 и 46 положительных целых чисел, всего $42 + 1 + 46 = 89$ штук.

3. Число $20+\sqrt{21}$ — корень уравнения $x^2+ax+b=0$, где a,b — целые числа. Найдите $a+b$.

   Ответ: 339.

   Указание. Корнями квадратных уравнений являются «сопряженные» иррациональные числа: если есть корень $20+\sqrt{21}$, то есть корень $20-\sqrt{21}$.

   Тогда по теореме Виета:
   $a=-\left(\left(20+\sqrt{21}\right)+\left(20-\sqrt{21}\right)\right)=-40,$
   $b=\left(20+\sqrt{21}\right)\left(20-\sqrt{21}\right)=400-21=379,$
   $a+b=339.$

   Для полного решения утверждение о сопряженном корне требует обоснования. Строгие рассуждения показаны в решении.

   Решение. Из условия:

   $\left(20+\sqrt{21}\right)^2+a\left(20+\sqrt{21}\right)+b=0,$

   $400+40\sqrt{21}+21+20a+a\sqrt{21}+b=0,$

   $\sqrt{21}(40+a)+(20a+b+421)=0.$

   Заметим, что a,b — целые числа. Если $40+a\neq 0$, то слева стоит иррациональное число, а справа — рациональное, что невозможно. Значит, $40+a=0$, откуда $a=-40$. Тогда $20a+b+421=20\cdot(-40)+b+421=b-379=0$, откуда получаем $b=379$, $a+b=379-40=339$.

4. Число $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ — корень уравнения $x^2+ax+b=0$, где a,b — целые числа. Найдите $a+b$.

   Ответ: 1.

   Указание. См. указание к задаче № 3. Корни уравнения $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$ и $-1-\sqrt{2}$, $a=2, b=-1, a+b=1$.

   Решение. Заметим, что $\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}=\left|\sqrt{2}-1\right|=-1+\sqrt{2}$. Аналогично приведенным в решении задачи № 3 рассуждениям, имеем:

   $\left(-1+\sqrt{2}\right)^2+a\left(-1+\sqrt{2}\right)+b=0,$

   $3-2\sqrt{2}-a+a\sqrt{2}+b=\sqrt{2}(-2+a)+(3-a+b)=0,$

   $-2+a=0$ и $3-a+b=0,$

   $a=2, b=-1, a+b=1.$

5. Простые числа p,q таковы, что уравнение $x^2+3px-7q=0$ имеет два корня, являющихся целыми числами. Найдите наименьшее возможное значение суммы $p+q$.

   Ответ: 15.

   Решение. Запишем уравнение в виде $x(x+3p)-7q=0$. Если p — нечётно, то числа x и $x+3p$ разной чётности, откуда $x(x+3p)$ — чётно. Тогда $7q$ также чётно, откуда $q=2$. Значит, либо $p=2$, либо $q=2$.

   (1) Пусть $p=2$. Для $x^2+6x-7q=0$ имеем $D=36+28q=4(9+7q)$. Дискриминант должен быть полным квадратом (иначе корни не целые), значит, $9+7q$ — квадрат целого числа. Наименьшее простое q, при котором $9+7q$ квадрат — $q=13$ (это нетрудно проверить, перебирая простые значения q от 2 до 13). При этом $p+q=2+13=15$.

   (2) Пусть $q=2$. Для $x^2+3px-14=0$ имеем $D=9p^2+56$. Дискриминант должен быть полным квадратом (иначе корни не целые), но он даёт при делении на 3 остаток 2, что невозможно.

   Комментарий. В случае (2) используется факт, что квадрат целого числа при делении на 3 даёт остаток 0 или 1. Действительно, любое целое число имеет вид

$3k$ или $3k \pm 1$, где k — некоторое целое. В первом случае квадрат делится на 3. Во втором случае квадрат равен $(3k \pm 1)^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$, откуда видно, что он даёт остаток 1.

6. Числа a, b — корни уравнения $x^2 - \left(\sqrt{6} + \sqrt{15}\right) + 3\sqrt{10} = 0$, $a < b$. Найдите $a^2 + 2b^2$.

   Ответ: 36.

   Указание: корни $\sqrt{6}$, $\sqrt{15}$, $a^2 + 2b^2 = 6 + 30 = 36$.

   Решение. Так как $\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} = 3\sqrt{10}$, то по обратной теореме Виета числа $\sqrt{6}$ и $\sqrt{15}$ — корни данного уравнения. Тогда $a^2 + 2b^2 = 6 + 2 \cdot 15 = 36$.

7. Число $(a^2 + b^2)^2$ — корень уравнения $x^2 - 4a^2b^2x = 4$. Найдите значение выражения $a^4 - b^4$.

   Ответ: −2 или 2.

   Решение. Имеет место $(a^2 + b^2)^4 - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2 = 4$. Преобразуем:
   $(a^2 + b^2)^4 - 4a^2b^2(a^2 + b^2)^2 = (a^2 + b^2)^2(a^2 - b^2)^2 = (a^4 - b^4)^2 = 4$,
   откуда $a^4 - b^4 = \pm 2$.

8. При каком значении a оба корня уравнения $x^2 + 7x + 5 = 0$ являются корнями уравнения $x^3 = 44x + a$?

   Ответ: 35

   Решение. Если оба корня уравнения $x^2 + 7x + 5 = 0$ являются корнями уравнения $x^3 = 44x + a$, то многочлен $x^3 - 44x - a$ должен раскладываться на множители, один из которых $x^2 + 7x + 5$. Так как $x^3 - 44x = (x^2 + 7x + 5)(x - 7) + 35$, то это возможно только при $a = 35$.

9. От прямоугольного листа бумаги площади 342 отрезали квадрат. Оставшаяся часть — прямоугольник периметра 57. Найдите площадь отрезанного квадрата.

   Ответ: 144.

   Указание: доску 28,5×12 разделили на квадрат 12×12 и прямоугольник 16,5×12.

   Решение. Если отрезали квадрат со стороной x, то стороны данного листа равны x и $57/2 - x + x = 57/2$. Тогда $x = 342 : 57/2 = 12$. Искомая площадь $12^2 = 144$.

10. Найдите длину гипотенузы прямоугольного треугольника, если сумма катетов равна 1057, а площадь треугольника равна 22770.

    Ответ: 1013.

    Указание: $45^2 = 2025 = 1013^2 - 1012^2$.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2020-2021 учебный год

    Решение. Если x — длина катета, то удвоенная площадь треугольника равна $x(1057 - x) = 22770 \cdot 2$. Получаем уравнение $x^2 - 1057x + 45540 = 0$, его корни 45 и 1012. Остаётся заметить, что из равенства $45^2 = 2025 = 1013^2 - 1012^2$ и теоремы Пифагора следует, что длина гипотенузы равна 1013.

11. При каком значении a корни квадратного уравнения $ax^2 + 12x + 9a = 0$ совпадают?

    Ответ: -2 или 2.

    Решение. Дискриминант данного уравнения равен $D = 12^2 - 36a^2$. Он равен нулю, если $a^2 = 4$, $a = \pm 2$.

12. Найдите положительный корень уравнения $\sqrt{x^2 - 2021} = x^2 - 2023$.

    Ответ: 45

    Решение. При замене $t = \sqrt{x^2 - 2021}$ данное уравнение превращается в соотношение $t = t^2 - 2$. Его корни −1 и 2. Так как $t \geq 0$, то $\sqrt{x^2 - 2021} = 2$, $x^2 = 2025$, $x = \pm 45$.

13. В шахматном турнире школы участвовали 57 учеников, среди которых мальчиков больше, чем девочек. Каждые двое сыграли ровно одну партию. Известно, что партий между участниками одного пола было на 56 больше, нежели партий между мальчиком и девочкой. Сколько мальчиков участвовало в турнире?

    Ответ: 35.

    Решение. Пусть в турнире участвовали n мальчиков и $57 - n$ девочек. Тогда состоялось $n(n-1)/2$ партий между мальчиками, $(57-n)(56-n)/2$ партий между девочками и $n(57-n)$ между мальчиками и девочками. Из условия получаем уравнение $n(n-1)/2 + (57-n)(56-n)/2 = n(57-n) + 56$. Упростим и решим:

    $n(n-1) + (57-n)(56-n) = 2n(57-n) + 56 \cdot 2$,
    $n^2 - n + n^2 - 113n + 56 \cdot 57 = 114n - 2n^2 + 56 \cdot 2$,
    $4n^2 - 228n + 56 \cdot 55 = 0$,
    $n^2 - 57n + 14 \cdot 55 = 0$,
    $n^2 - (22 + 35)n + 22 \cdot 35 = 0$,
    по обратной теореме Виета корни 22 и 35.

    Значит, либо мальчиков — 22, девочек — 35, либо наоборот. По условию мальчиков больше, поэтому искомое количество равно 35.

14. При каком наименьшем натуральном числе a уравнение $x^2 + 7x + 2021 - a = 0$ имеет действительный корень?

    Ответ: 2009

Решение. Дискриминант уравнения равен $D = 49 - 4(2021 - a) = 4a - 8035$. Условие $4a - 8035 \geq 0$ выполнено при $a \geq 8035 : 4 = 2008{,}75$, наименьшее возможное значение a равно 2009.

15. В выпуклом n-угольнике $n + 432$ диагоналей. Чему равно n?

Ответ: 32

Решение. Выпуклый n-угольник имеет $n(n-3)/2$ диагоналей. Из условия получаем $n(n-3) = 2(n+432)$ или $n^2 - 5n - 864 = 0$. Корни уравнения — числа –27 и 32. Подходит только $n = 32$.