

Математика. 8 класс МВ (21 сентября 2021)

Задания карусели

1. В волейбольном турнире принимало участие 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно 1 партию. За победу команда получала 1 очко, за поражение — 0 очков, ничьих в волейболе не бывает. Сколько очков набрали все команды в сумме?
2. Цена на акции в течение трёх месяцев подряд увеличивалась на 20 % в месяц, а четвертый месяц уменьшилась на 50 %. На сколько процентов акции сейчас стоят меньше, чем 4 месяца назад?
3. Несократимая обыкновенная дробь увеличивается вдвое после увеличения и числителя, и знаменателя на 10. Чему равна сумма числителя и знаменателя такой дроби?
4. Найдите остаток от деления 3^{100} на 8.
5. Углы треугольника относятся как 3 : 5 : 10. Сколько градусов составляет средний по величине внешний угол треугольника?
6. На конкурсе красоты за Машу проголосовали 20 % зрителей, за Аню — 35 % зрителей, за Катю — 45% зрителей. После этого проголосовали члены жюри и их голоса добавили к голосам зрителей. Оказалось, что все новые голоса были отданы за Катю, а у Маши оказалось только 16 % голосов. Сколько процентов голосов стало у Ани?
7. Сколько существует целых чисел от 10 до 999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?
8. Числа a и b таковы, что $a = b + 1$ и $a^4 = b^4$. Найдите значение $2a - 12b$.
9. Числа 2010 и 2350 поделили на одно и то же число. Первый раз получили остаток 18, второй раз — 26. На какое число делили?
10. На координатной плоскости отмечены точки $A(0; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(0; 0)$ и $D(2; -9)$. Сколько из них лежат на прямой $2x - 3y + 7 = 0$?
11. Витя сделал в тире 10 выстрелов и выбил 9, 3, 8, 9, 7, 4, 7, 2, 7, 4 очков. Найдите среднее арифметическое и медиану выбитых им очков. В ответе запишите неотрицательную разность этих значений.
12. Разность между средним арифметическим чисел A и B и средним арифметическим чисел C и D равна 5. Числа A и C отличаются на 3. На сколько могут отличаться числа B и D ? (Числа отличаются на свою неотрицательную разность).
13. Два угла треугольника равны 20° и 70° . Сколько градусов составляет угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника?

14. На конференции по математике средний возраст тех, кто оказался на ней впервые равен 22 годам, а тех, кто приезжает не в первый раз — 47 годам. При этом средний возраст всех участников конференции — 41 год. Сколько процентов составляет доля участников, приехавших впервые?
15. Муха сидит в точке графика функции $y = 3x - 4$. Потом она перелетела в другую точку графика. При этом её абсцисса увеличилась на 5, а ордината увеличилась в 2 раза. Чему была равна ордината первоначальной точки?
16. Из одинаковых кубиков $1 \times 1 \times 1$ собрали куб $3 \times 3 \times 3$ и окрасили его снаружи в белый цвет, потратив при этом 21 г краски. Затем убрали те кубики, которые не примыкают к ребрам получившегося куба. Всю поверхность получившейся фигуры перекрасили в красный цвет. Сколько граммов красной краски потратили?
17. Вася выбрал несколько различных натуральных чисел. Произведение двух самых маленьких из них равно 16, а произведение двух самых больших равно 225. Чему равна сумма всех Васиных чисел?
18. Есть стандартная колода из 36 карт. Сколькими способами можно выбрать из неё три карты так, чтобы среди них был ровно два туза?

Задания карусели, ответы, решения и указания

1. В волейбольном турнире принимало участие 10 команд. Каждая команда сыграла с каждой ровно 1 партию. За победу команда получала 1 очко, за поражение — 0 очков, ничьих в волейболе не бывает. Сколько очков набрали все команды в сумме?

Ответ: 45.

Решение. Всего было сыграно $10 \cdot 9 : 2 = 45$ матчей. В каждом матче было разыграно 1 очко. Значит, суммарно было набрано 45 очков.

2. Цена на акции в течение трёх месяцев подряд увеличивалась на 20 % в месяц, а на четвёртый месяц уменьшилась на 50 %. На сколько процентов акции сейчас стоят меньше, чем 4 месяца назад?

Ответ: 13,6.

Решение. Через 4 месяца цена акций стала равна $1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 0,5 = 0,864$ от итоговой цены. Искомое число процентов равно $(1 - 0,864) \cdot 100 \% = 13,6 \%$.

3. Несократимая обыкновенная дробь увеличивается вдвое после увеличения и числителя, и знаменателя на 10. Чему равна сумма числителя и знаменателя такой дроби?

Ответ: 7.

Решение. Если a/b — дробь, удовлетворяющая условию, то выполнено

$$2 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a + 10}{b + 10}.$$

Отсюда следует $2a(b + 10) = b(a + 10)$ или $a(b + 20) = 10b$.

Так как НОД $(a; b) = 1$, то a — делитель числа 10, то есть равно 1, 2, 5 или 10. В этих случаях $b + 20 = 10b$, $b + 20 = 5b$, $b + 20 = 2b$ или $b + 20 = b$. Единственный возможный вариант: $a = 2$; $b = 5$. Искомое значение — $2 + 5 = 7$.

4. Найдите остаток от деления 3^{100} на 8.

Ответ: 1.

Указание. Так как $3^{100} = (3^2)^{50}$, а 3^2 при делении на 8 даёт остаток 1, то данное число даёт тот же остаток, что и 1^{50} , то есть остаток 1.

5. Углы треугольника относятся как 3 : 5 : 10. Сколько градусов составляет средний по величине внешний угол треугольника?

Ответ: 130.

Указание. Углы относятся как 30 : 50 : 100. Так как $30 + 50 + 100 = 180$, то углы треугольника равны 30° , 50° и 100° . Средний внешний угол — при угле 50° , он равен 130° .

6. На конкурсе красоты за Машу проголосовали 20 % зрителей, за Аню — 35 % зрителей, за Катю — 45% зрителей. После этого проголосовали члены жюри и их голоса добавили к голосам зрителей. Оказалось, что все новые голоса были отданы за Катю, а у Маши оказалось только 16 % голосов. Сколько процентов голосов стало у Ани?

Ответ: 28.

Решение. Количество голосов за Машу и Аню не изменились. Значит, их число процентов соотносятся также. Поэтому, число процентов Ани равно

$$35 \% \cdot \frac{16 \%}{20 \%} = 28 \%$$

7. Сколько существует целых чисел от 10 до 999, в десятичной записи которых нет двух стоящих рядом одинаковых цифр?

Ответ: 810.

Решение. Двухзначных чисел, в записи которых разные цифры, — $9 \cdot 9 = 81$. В таком трёхзначном числе первую цифру можно выбрать 9 способами (любая, кроме нуля), вторую — 9 способами (любая, кроме первой), третью — 9 способами (любая, кроме второй), всего $9 \cdot 9 \cdot 9 = 729$ чисел. Итого $81 + 729 = 810$.

8. Числа a и b таковы, что $a = b + 1$ и $a^4 = b^4$. Найдите значение $2a - 12b$.

Ответ: 7.

Решение. Из условия $a^4 = b^4$ следует, что $a = b$ или $a = -b$. Так как $a = b + 1$, то подходят только $a = 0,5$, $b = -0,5$. Тогда $2a - 12b = 7$.

9. Числа 2010 и 2350 поделили на одно и то же число. Первый раз получили остаток 18, второй раз — 26. На какое число делили?

Ответ: 83, 166 или 332

Решение. Искомое число — общий делитель чисел $2010 - 18$ и $2350 - 26$, больший 26 (иначе 26 не может быть остатком). Так как $2010 - 18 = 1992 = 2^3 \cdot 3 \cdot 83$, $2350 - 26 = 2324 = 2^2 \cdot 7 \cdot 83$, то искомое число 83 , $2 \cdot 83 = 166$ или $2 \cdot 2 \cdot 83 = 332$.

10. На координатной плоскости отмечены точки $A(0; -2)$, $B(-2; 1)$, $C(0; 0)$ и $D(2; -9)$. Сколько из них лежат на прямой $2x - 3y + 7 = 0$?

Ответ: 1.

Указание. На прямой лежит только точка B , в чём нетрудно убедиться подстановкой координат в уравнение прямой.

11. Витя сделал в тире 10 выстрелов и выбил 9, 3, 8, 9, 7, 4, 7, 2, 7, 4 очков. Найдите среднее арифметическое и медиану выбитых им очков. В ответе запишите неотрицательную разность этих значений.

Ответ: 1.

Указание. Среднее арифметическое — 6, медиана — 7, они отличаются на 1.

12. Разность между средним арифметическим чисел A и B и средним арифметическим чисел C и D равна 5. Числа A и C отличаются на 3. На сколько могут отличаться числа B и D ? (Числа отличаются на свою неотрицательную разность).

Ответ: 7 или 13.

Решение. Из условия $(A + B) : 2 - (C + D) : 2 = 5$, откуда $(A - C) + (B - D) = 10$.
Из условия $A - C$ равно 3 или -3 , значит $B - D$ равно $10 - 3 = 7$ или $10 + 3 = 13$.

13. Два угла треугольника равны 20° и 70° . Сколько градусов составляет угол между высотой и биссектрисой, проведенными из вершины третьего угла треугольника?

Ответ: 25.

Указание. Треугольник прямоугольный, с меньшим катетом высота образует угол 20° , биссектриса — угол 45° , искомый угол $45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$.

14. На конференции по математике средний возраст тех, кто оказался на ней впервые равен 22 годам, а тех, кто приезжает не в первый раз — 47 годам. При этом средний возраст всех участников конференции — 41 год. Сколько процентов составляет доля участников, приехавших впервые?

Ответ: 24.

Решение. Если впервые приехало x участников, а остальных — y , то выполнено $(22x + 47y)/(x + y) = 41$, откуда $22x + 47y = 41x + 41y$ или $19x = 6y$.
Получаем $25x = 6x + 6y$, $x/(x + y) = 6/25$.
Искомый процент равен $6/25 \cdot 100\% = 24\%$.

15. Муха сидит в точке графика функции $y = 3x - 4$. Потом она перелетела в другую точку графика. При этом её абсцисса увеличилась на 5, а ордината увеличилась в 2 раза. Чему была равна ордината первоначальной точки?

Ответ: 15

Решение. Если $(x_0; y_0)$ — координаты искомой точки, то выполнено $y_0 = 3x_0 - 4$ и $2y_0 = 3(x_0 + 5) - 4$. Из второго условия $2y_0 = 3x_0 - 4 + 15$, учитывая первое, получаем $y_0 = 15$.

16. Из одинаковых кубиков $1 \times 1 \times 1$ собрали куб $3 \times 3 \times 3$ и окрасили его снаружи в белый цвет, потратив при этом 21 г краски. Затем убрали те кубики, которые не примыкают к ребрам получившегося куба. Всю поверхность получившейся фигуры перекрасили в красный цвет. Сколько граммов красной краски потратили?

Ответ: 28.

Решение. Убрали 6 граней 1×1 (в центре каждой грани), добавили 24 грани 1×1 (по две у каждого ребра). На поверхности куба $3 \times 3 \times 3$ было 54 квадратиков 1×1 , а стало $54 - 6 + 24 = 72$. Значит, понадобится в $72/54 = 4/3$ раза больше краски, то есть $4/3 \cdot 21 = 28$ г.

17. Вася выбрал несколько различных натуральных чисел. Произведение двух самых маленьких из них равно 16, а произведение двух самых больших равно 225. Чему равна сумма всех Васиных чисел?

Ответ: 44.

Решение. Произведение двух самых маленьких — 16, значит одно из этих чисел не меньше 8. Произведение двух самых больших 225, значит одно из них не больше 9. Числа 2, 8, 9, 25

18. Есть стандартная колода из 36 карт. Сколькими способами можно выбрать из неё три карты так, чтобы среди них был ровно два туза?

В качестве ответа введите число.

Пример: 123

Ответ: 192.

Указание. Два туза можно вытащить 6 способами, одного не туза можно вытащить 32 способами, $6 \cdot 32 = 192$.