Блок 10. Поверхности и объемы

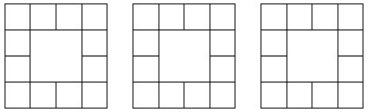
Интернет-карусель 2021–2022

Задания

1. Каким наименьшим числом квадратов 2×2 можно полностью оклеить поверхность параллелепипеда $10 \times 12 \times 14$?

2. Площадь поверхности параллелепипеда $3 \times 4 \times N$ равна 206. Чему равно N?

3. Куб $4 \times 4 \times 4$ был составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Затем некоторые кубики убрали (остальные скреплены между собой). Какое наименьшее количество кубиков могло быть убрано, чтобы фигура выглядела сверху, сбоку и спереди, как показано на рисунках?



сверх сбоку спереди

4. Федя собрал из одинаковых кубиков фигуру. Сначала он склеил два кубика, получив параллелепипед $1 \times 1 \times 2$. Затем к каждой грани кубика, выходящей на поверхность, приклеил еще по одному кубику. Из скольких кубиков состоит полученная фигура? Любые два кубика приклеиваются друг к другу так, чтобы их грани совпали.

5. Федя собрал из одинаковых кубиков фигуру. Сначала он к двум соседним граням кубика приклеил по кубику, получив «уголок». Затем к каждой грани кубика, выходящей на поверхность, приклеил еще по одному кубику. Из скольких кубиков состоит полученная фигура? Любые два кубика приклеиваются друг к другу так, чтобы их грани совпали.

6. Рома разрезал брусок $12 \times 10 \times 8$ на части $3 \times 1 \times 1$. Какова суммарная площадь разрезов?

7. Рома разрезал брусок $12 \times 10 \times 8$ на 350 частей, каждая из которых имеет размеры $2 \times 1 \times 1$ или $3 \times 1 \times 1$. Какова суммарная площадь разрезов?

8. Федя собрал из одинаковых кубиков фигуру. Она представляет из себя два параллелепипеда $3 \times 4 \times 5$, имеющих общие кубики. Причём общие кубики образуют куб $2 \times 2 \times 2$. Из скольких кубиков состоит фигура, собранная Федей?

9. Из куба $11 \times 11 \times 11$, составленного из белых кубиков $1 \times 1 \times 1$, убрали 1000 кубиков $1 \times 1 \times 1$, образующих куб. Поверхность оставшейся части покрасили в красный

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

цвета. Затем покрашенную фигуру разрезали на кубики $1 \times 1 \times 1$. У скольких из этих кубиков ровно 2 красные грани?

10. Куб $5 \times 5 \times 5$ составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Из него вытащили 1 кубик, у которого хотя бы одна грань выходила наружу. Из скольких квадратов 1×1 состоит поверхность получившейся фигуры?

11. Девочки в садике играли в кубики. У Наташи есть 23 одинаковых маленьких кубика, у Ани — 16, у Риммы — 41, а у Машеньки — 9. Какие две девочки сложили все свои кубики вместе и из всех них составили куб $N \times N \times N$. Чему равно N?

12. У Пети есть два бруска $2 \times 3 \times 5$ и $4 \times 4 \times 5$ и много кубиков $1 \times 1 \times 1$. Используя оба бруска и N кубиков, он сложил еще один куб. При каком наименьшем N он мог это сделать?

13. Куб $4 \times 4 \times 4$ составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. К нему в некотором месте приделали один кубик. Из скольких квадратов 1×1 состоит поверхность получившейся фигуры?

14. Куб $4 \times 4 \times 4$ составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. К нему в некоторых местах приделали два кубика. Из скольких квадратов 1×1 состоит поверхность получившейся фигуры?

15. Три куба составлены из 197 одинаковых маленьких кубиков. Из скольких кубиков составлен самый большой из этих кубов?

16. У Андрея, Бориса и Василия есть по одинаковому бруску в форме параллелепипеда. Площадь поверхности одного бруска равна 230. Каждый поделил свой брусок прямым разрезом перпендикулярно какому-то ребру. Каждый посчитал площадь своего разреза. Получили три разных числа, Андрей получилось 39, у Бориса — 63. Сколько получилось у Василия?

Блок 10. Поверхности и объемы

Интернет-карусель 2021–2022

Условия, ответы, решения и указания

1. Каким наименьшим числом квадратов 2×2 можно полностью оклеить поверхность параллелепипеда $10 \times 12 \times 14$?

   Ответ: 214.

   Решение. Так как длины сторон каждой грани — чётные числа, то квадратами 2×2 можно оклеить каждую грань по отдельности. Значит, необходимое и достаточное количество квадратов в $2 \cdot 2 = 4$ раза меньше площади поверхности параллелепипеда.

   Площадь поверхности равна $2 \cdot (10 \cdot 12 + 12 \cdot 14 + 14 \cdot 10) = 2 \cdot 428$, количество квадратов равно $2 \cdot 428 : 4 = 214$.

2. Площадь поверхности параллелепипеда $3 \times 4 \times N$ равна 206. Чему равно N?

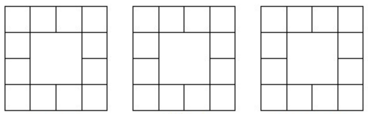
   Ответ: 13

   Решение (арифметика). Две грани 3×4 параллелепипеда можно оклеить двумя прямоугольниками 3×4, остальное — прямоугольником со сторонами N и $3 + 3 + 4 + 4 = 14$. Тогда $N = (206 - 2 \cdot 3 \cdot 4) : 14 = 13$.

   Решение (уравнение). Площадь поверхности равна $2 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot N + 4 \cdot N)$ 206, откуда $12 + 7 \cdot N = 103$, $7 \cdot N = 91$, $N = 13$.

   Источник: предложил Д. А. Калинин.

3. Куб $4 \times 4 \times 4$ был составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Затем некоторые кубики убрали (остальные скреплены между собой). Какое наименьшее количество кубиков могло быть убрано, чтобы фигура выглядела сверху, сбоку и спереди, как показано на рисунках?



сверх сбоку спереди

   Ответ: 32.

   Решение. Для указанного вида сверху надо вынуть центральный куб $2 \times 2 \times 2$ и части $2 \times 2 \times 1$ в центрах верхней и нижней грани. Для вида сбоку надо еще вынуть части $2 \times 2 \times 1$ в центрах левой и правой грани. Для вида спереди — части $2 \times 2 \times 1$ в центрах передней и задней грани.

   Итого надо убрать $2 \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot (2 \cdot 2) = 32$ кубика.

   Комментарий. Останутся только кубики в углах куба $4 \times 4 \times 4$ и примыкающие к его ребрам.

4. Федя собрал из одинаковых кубиков фигуру. Сначала он склеил два кубика, получив параллелепипед $1 \times 1 \times 2$. Затем к каждой грани кубика, выходящей на поверхность, приклеил еще по одному кубику. Из скольких кубиков состоит полученная фигура? Любые два кубика приклеиваются друг к другу так, чтобы их грани совпали.

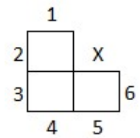
   Ответ: 12

   Решение. На поверхности $1 \times 1 \times 2$ всего 10 клеток 1×1. Приклеят 10 кубиков, станет $2 + 10 = 12$ штук.

5. Федя собрал из одинаковых кубиков фигуру. Сначала он к двум соседним граням кубика приклеил по кубику, получив «уголок». Затем к каждой грани кубика, выходящей на поверхность, приклеил еще по одному кубику. Из скольких кубиков состоит полученная фигура? Любые два кубика приклеиваются друг к другу так, чтобы их грани совпали.

   Ответ: 16

   Решение. Посмотри на «уголок», как показано на рисунке. Сверху и снизу можно приклеить к трём граням по 3 кубика, всего 6 штук. По бокам к граням, отмеченным цифрами от 1 до 6, приклеивается по кубику. В нишу, отмеченную крестиком — один кубик. Вместе с тремя кубиками самого «уголка» получаем $3 + 6 + 6 + 1 = 16$ штук.



6. Рома разрезал брусок $12 \times 10 \times 8$ на части $3 \times 1 \times 1$. Какова суммарная площадь разрезов?

   Ответ: 1944.

   Указание. Можно посчитать площадь разрезов при каком-то частном случае разрезания на части и верить, что ответ не зависит от способа разрезания. Сначала брусок 3 разрезами площади $8 \cdot 10$ разделим на 4 блока $3 \times 10 \times 8$. Затем каждый блок разделим на $3 \times 1 \times 1$, сделав 9 разрезов площади $3 \cdot 8$ и 7 разрезов площади $3 \cdot 10$. Итого $3 \cdot 8 \cdot 10 + 4 \cdot (9 \cdot 3 \cdot 8 + 7 \cdot 3 \cdot 10) = 1944$.

В решении приведён способ подсчёта, который не зависит от способа разрезания.

Решение. Количество частей втрое меньше числа кубиков $1 \times 1 \times 1$, то есть равно $(12 \cdot 10 \cdot 8) : 3 = 320$. Площадь поверхности одной части равна 14, площадь поверхности всего бруска — $2 \cdot (12 \cdot 10 + 10 \cdot 8 + 12 \cdot 8) = 592$. Площадь разрезов равна $(320 \cdot 14 - 592) : 2 = 1944$.

7. Рома разрезал брусок $12 \times 10 \times 8$ на 350 частей, каждая из которых имеет размеры $2 \times 1 \times 1$ или $3 \times 1 \times 1$. Какова суммарная площадь разрезов?

Ответ: 1974.

Указание: было 260 частей $3 \times 1 \times 1$ и 90 частей $2 \times 1 \times 1$.

Комментарий. См. указание к предыдущей задаче.

Решение. Во-первых, можно найти, сколько получилось частей каждого вида. Используем «метод Прокруста»: если все части — $3 \times 1 \times 1$, то их количество — $12 \cdot 10 \cdot 8 : 3 = 320$. Количество частей увеличивается на 1, сохраняя объем, при замене 2 больших частей на 3 меньшие. Значит, надо $350 - 320 = 30$ таких замен, больших частей станет $320 - 2 \cdot 30 = 260$ штук, больших — $3 \cdot 30 = 90$ штук.

Найти площадь разрезов можно методом, описанным в решении предыдущей задачи: площадь поверхности бруска —592, площади поверхностей частей 10 и 14, площадь разрезов равна $(90 \cdot 10 + 260 \cdot 14 - 592) : 2 = 1974$.

8. Федя собрал из одинаковых кубиков фигуру. Она представляет из себя два параллелепипеда $3 \times 4 \times 5$, имеющих общие кубики. Причём общие кубики образуют куб $2 \times 2 \times 2$. Из скольких кубиков состоит фигура, собранная Федей?

Ответ: 112.

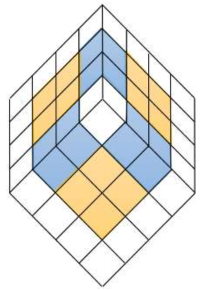
Решение. В сумме объемов параллелепипедов общая часть учтена 2 раза. Поэтому, объем фигура равен $2 \cdot (3 \cdot 4 \cdot 5) - 2 \cdot 2 \cdot 2 = 112$.

Комментарий. Обратите внимание, что описанная в условии фигура может выглядеть по-разному. Постарайтесь нарисовать хотя бы два различных варианта.

9. Из куба $11 \times 11 \times 11$, составленного из белых кубиков $1 \times 1 \times 1$, убрали 1000 кубиков $1 \times 1 \times 1$, образующих куб. Поверхность оставшейся части покрасили в красный цвета. Затем покрашенную фигуру разрезали на кубики $1 \times 1 \times 1$. У скольких из этих кубиков ровно 2 красные грани?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

Ответ: 270.



Решение. Подходят неграничные кубики трёх граней первоначального куба (3 по 9×9 штук) и неугловые кубики на трёх ребрах первоначального куба (3 по 9 штук). Итого $3 \cdot (9 \cdot 9 + 9) = 270$.

Комментарий. Указанные кубики показаны на рисунке справа на примере, получаемом из куба $4 \times 4 \times 4$, из которого вырезали $3 \times 3 \times 3$. Здесь неграничные кубики трёх граней — голубые, неугловые кубики на трёх ребрах — жёлтые.

10. Куб $5 \times 5 \times 5$ составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Из него вытащили 1 кубик, у которого хотя бы одна грань выходила наружу. Из скольких квадратов 1×1 состоит поверхность получившейся фигуры?

Ответ: 150, 152, 154.

Указание: поверхность куба — $5 \times 5 \times 6 = 150$ клеток.

Решение. Если вытащили угловой кубик, то площадь поверхности не изменится (три клетки с поверхности пропадут и возникнут три новые).

Если вытащили кубик на ребре, то площадь поверхности изменится на $4 - 2 = 2$ клетки (две пропадут и возникнут четыре), станет 152.

Если вытащили кубик внутри грани, то площадь поверхности изменится на $5 - 1 = 4$ клетки (одна пропадёт, а возникнет 5 клеток), станет 154.

11. Девочки в садике играли в кубики. У Наташи есть 23 одинаковых маленьких кубика, у Ани — 16, у Риммы — 41, а у Машеньки — 9. Какие-то две девочки сложили все свои кубики вместе и из всех них составили куб $N \times N \times N$. Чему равно N?

Ответ: 4.

Решение. У двух девочек от $9 + 16 = 25$ до $23 + 41 = 64$ кубиков. Куб может состоять из 1, 8, 27, 64, 125, … кубиков. Перебором нетрудно понять, что ровно 27 кубиков ни у каких двух девочек нет, а ровно 64 есть у Наташи и Риммы вместе. Из 64 кубиков состоит куб $4 \times 4 \times 4$, $N = 4$.

12. У Пети есть два бруска $2 \times 3 \times 5$ и $4 \times 4 \times 5$ и много кубиков $1 \times 1 \times 1$. Используя оба бруска и N кубиков, он сложил еще один куб. При каком наименьшем N он мог это сделать?

Ответ: 106.

Решение. Сумма любых двух ребер брусков не менее 6, поэтому можно собрать куб, который не менее чем $6 \times 6 \times 6$. Куб $6 \times 6 \times 6$ сделать можно: из $2 \times 3 \times 5$ сделать $2 \times 6 \times 6$, из $4 \times 4 \times 5$ сделать $4 \times 6 \times 6$, из полученных деталей сделать $6 \times 6 \times 6$. Для этого понадобится $6 \cdot 6 \cdot 6 - 2 \cdot 3 \cdot 5 - 4 \cdot 4 \cdot 5 = 106$ кубиков.

13. Куб $4 \times 4 \times 4$ составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. К нему в некотором месте приделали один кубик. Из скольких квадратов 1×1 состоит поверхность получившейся фигуры?

Ответ: 100

Решение. Поверхность куба — $4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$ клеток. Если приделали 1 кубик, то одна клетка с поверхности пропадёт и возникнут пять новых. Поверхность станет состоять из $96 - 1 + 5 = 100$ клеток.

14. Куб $4 \times 4 \times 4$ составлен из кубиков $1 \times 1 \times 1$. К нему в некоторых местах приделали два кубика. Из скольких квадратов 1×1 состоит поверхность получившейся фигуры?

Ответ: 102, 104

Указание: эти два кубика могут иметь общую грань, а могут и не иметь.

Решение. Поверхность куба — $4 \cdot 4 \cdot 6 = 96$ клеток. Если приделали 1 кубик, то поверхность станет состоять из $96 - 1 + 5 = 100$ клеток.

Приделаем второй кубик, он может закрыть на поверхности одну или две клетки. Если одну, то поверхность также увеличится на 4 клетки и станет состоять из $100 + 4 = 104$ клеток. Если кубик закрыл 2 клетки, то на поверхности появилось $6 - 2 = 4$ новые, поверхность станет состоять из $100 - 2 + 4 = 102$ клеток.

15. Три куба составлены из 197 одинаковых маленьких кубиков. Из скольких кубиков составлен самый большой из этих кубов?

Ответ: 125

Решение. Куб может состоять из $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$, $4^3 = 64$, $5^3 = 125$, $6^3 = 216$, … кубиков. Куб $6 \times 6 \times 6$ или больше не может быть собран, так как $6^3 > 197$. Если куб $5 \times 5 \times 5$ не собирали, то кубы составлены не более чем из $43 \cdot 3 = 192 < 197$, что невозможно. Значит, больший куб состоит из $5^3 = 125$ кубиков.

Комментарий. Это возможно: $197 = 5^3 + 4^3 + 2^3$.

16. У Андрея, Бориса и Василия есть по одинаковому бруску в форме параллелепипеда. Площадь поверхности одного бруска равна 230. Каждый поделил свой брусок прямым разрезом перпендикулярно какому-то ребру. Каждый посчитал площадь своего

разреза. Получили три разных числа, Андрей получилось 39, у Бориса — 63. Сколько получилось у Василия?

Ответ: 13.

Решение. Площади разрезов у ребят равны площадям трёх попарно неравных граней бруска. Сумма этих площадей $230 : 2 = 115$, площадь разреза у Василия равна $230 : 2 - 39 - 63 = 115 - 102 = 13$.