Блок 1. Многочлены

Интернет-карусель 2021–2022

Условия

1. При каком значении t многочлен $x^5+2x^4-3x^2+tx+4$ делится на $x+1$?
2. В многочлен $P(x)=2x^3-x^2+3x+2$ вместо переменной подставили многочлен $Q(x)=x^5-3x^3+3x^2+1$. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен $P\big(Q(x)\big)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P\big(Q(x)\big)$.
3. Дан многочлен $P(x)=x^3+3x^2-5x+2$. Затем в $P(x)$ вместо x подставили $P(x)$, в полученном снова вместо x подставили $P(x)$ и так далее, получили многочлен $P(P(P(P(P(x)))))$. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Чему равна степень такого многочлена?
4. Дан многочлен $P(x)=x^3+3x^2-5x+2$. Затем в $P(x)$ вместо x подставили $P(x)$, в полученном снова вместо x подставили $P(x)$ и так далее, получили многочлен $P(P(P(P(P(x)))))$. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.
5. Дан многочлен $P(x)=x^3-2x^2-4x-1$. Затем в $P(x)$ вместо x подставили $P(x)$, в полученном снова вместо x подставили $P(x)$ и так далее, всего подставляли 2021 раз. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Найдите свободный коэффициент этого многочлена.
6. Многочлен $P(x)=(a+b)x^4+(a-b)x^2-2$ делится на x^2-x+2. Найдите значение $5a+2b$.
7. Найти остаток от деления многочлена $(2x)^{2021}+5$ на многочлен $2x+1$.
8. Найдите степень многочлена
$(1-x)^{57}-(2-x)^{57}+(3-x)^{57}-\dots-(100-x)^{57}$.
9. Найдите старший коэффициент многочлена
$(1-x)^{57}-(2-x)^{57}+(3-x)^{57}-\dots-(100-x)^{57}$.
10. Пете дали многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Он поменял некоторые коэффициенты местами и получил многочлен $Q(x)$. Разность $P(2021)-Q(2021)$ оказалась натуральным числом. Какое минимальное значение может иметь эта разность?
11. Пусть $P(x)=3x^3+5x^2+2x+8$. Найдите хотя бы одно целое решение уравнения $P(x)=3050208$.

12. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, а число 3 — его корень. Пусть для некоторого целого t выполняется $P(t)=1$. Чему может быть равно t?
13. При каком значении a остаток от деления x^3+ax+4 на $x+2$ равен 6?
14. Выражение $(3x^4-5x+4)^3-(2x^3+4x^2-2x+6)^2(x^3+8x^2-4x-5)$ преобразовали и привели к стандартному виду многочлена. Найдите сумму его коэффициентов.
15. Выражение $(3x^4-5x+4)^3-(2x^3+4x^2-2x+6)^2(x^3+8x^2-4x-5)$ преобразовали и привели к стандартному виду многочлена. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях.
16. Пусть $P(x)=x^{12}-2021x+3$. Найдите свободный член многочлена $P(x+2)$.

Блок 1. Многочлены

Интернет-карусель 2021–2022

Условия, ответы, указания, решения, комментарии

Занятия карусели связаны с основными понятиями о многочленах, с делением многочленов, теоремой Безу. Часть заданий связаны с целочисленными многочленами, в частности используется теорема Безу для целочисленных многочленов.

1. При каком значении t многочлен $x^5+2x^4-3x^2+tx+4$ делится на $x+1$?

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть $P(x)$ — данный многочлен. Для некоторого многочлена $Q(x)$ должно быть выполнено $P(x)=(x+1)Q(x)$. При $x=-1$ должно выполняться $P(-1)=0$. Тогда $P(-1)=-1+2-3-t+4=0, t=2$.

   Комментарий. В этом решении используется доказательство теоремы Безу. Если на эту теорему ссылаться, то получится короче: при делении $P(x)$ на $x+1$ должен быть остаток 0; поэтому, $P(-1)=0$, откуда $P(-1)=2-t=0, t=2$.

2. В многочлен $P(x)=2x^3-x^2+3x+2$ вместо переменной подставили многочлен $Q(x)=x^5-3x^3+3x^2+1$. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен $P\big(Q(x)\big)$. Найдите сумму коэффициентов многочлена $P\big(Q(x)\big)$.

   Ответ: 20.

   Решение. Искомая сумма коэффициентов равна $P\big(Q(1)\big)$. Найдём это значение: $Q(1)=1-3+3+1=2, P(2)=16-4+6+2=20$.

3. Дан многочлен $P(x)=x^3+3x^2-5x+2$. Затем в $P(x)$ вместо x подставили $P(x)$, в полученном снова вместо x подставили $P(x)$ и так далее, получили многочлен $P(P(P(P(P(x)))))$. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Чему равна степень такого многочлена?

   Ответ: 243.

   Решение. Заметим, что если степень многочлена $P_1(x)$ равна d_1, а степень многочлена $P_2(x)$ равна d_2, то степень многочлена $P_1\big(P_2(x)\big)$ равна d_1d_2.

   Значит, при каждой подстановке степень увеличивается в 3 раза. Степень полученного многочлена будет равна $3^5=243$.

4. Дан многочлен $P(x)=x^3+3x^2-5x+2$. Затем в $P(x)$ вместо x подставили $P(x)$, в полученном снова вместо x подставили $P(x)$ и так далее, получили многочлен $P(P(P(P(P(x)))))$. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Найдите сумму коэффициентов этого многочлена.

   Ответ: 1.

   Решение. Искомая сумма равна $P(P(P(P(P(1)))))$. Заметим, $P(1)=1$. Тогда $P(P(P(P(P(1)))))=P(P(P(P(1))))=P(P(P(1)))=P(P(1))=P(1)=1$.

5. Дан многочлен $P(x)=x^3-2x^2-4x-1$. Затем в $P(x)$ вместо x подставили $P(x)$, в полученном снова вместо x подставили $P(x)$ и так далее, всего подставляли 2021 раз. Далее раскрыли скобки и привели подобные слагаемые, получив многочлен. Найдите свободный коэффициент этого многочлена.

   Ответ: 0.

   Решение. Нужно найти значение полученного многочлена при $x=0$: $P(0)=-1$, $P(P(0))=P(-1)=0$, $P(P(P(0)))=P(0)=-1$, и так далее. Заметим, что если подставляли нечётное число раз, то значение равно 0, если чётное — равно -1. Значит, после 2021 подстановки значение будет равно 0.

6. Многочлен $P(x)=(a+b)x^4+(a-b)x^2-2$ делится на x^2-x+2. Найдите значение $5a+2b$.

   Ответ: 2.

   Решение. Пусть $P(x)=(x^2-x+2)\cdot Q(x)$. Так как $x^2-x+2=(x-2)(x+1)$, то -1 и 2 — корни $P(x)$.

   Подставим их в $P(x)$:
   $P(1)=(a+b)+(a-b)-2=2a-2=0$, откуда $a=1$,
   $P(2)=16(a+b)+4(a-b)-2=20a+12b-2=0$.

   Отсюда $12b=-18, b=-1{,}5$. Тогда $5a+2b=5-3=2$.

7. Найти остаток от деления многочлена $(2x)^{2021}+5$ на многочлен $2x+1$.

   Ответ: 4.

   Решение. По теореме Безу многочлен $P(x)=(2x)^{2021}+5$ при делении на $2x+1$ даёт остаток $P(-1/2)$, так как $2x+1=0$ при $x=-1/2$.

   Получаем $P(-1/2)=(-1)^{2021}+5=5-1=4$.

8. Найдите степень многочлена
   $(1-x)^{57}-(2-x)^{57}+(3-x)^{57}-\dots-(100-x)^{57}$.

   Ответ: 56.

Решение. Старший член многочлена $(k-x)^{57}$ равен $-x^{57}$. В данной сумме половина таких слагаемых будет со знаком «+», половина — со знаком «–». Значит, они в многочлене нет одночленов степени 57. Одночлены степени 56 не сократятся, о чём говорит результат следующей задачи.

9. Найдите старший коэффициент многочлена $(1-x)^{57}-(2-x)^{57}+(3-x)^{57}-\dots-(100-x)^{57}$.

Ответ: −2850.

Решение. Заметим, что $(k-x)^{57}=-x^{57}+57k\cdot x^{56}-\cdots$. При раскрытии 100 таких выражений, половина из которых со знаком «+», половина — со знаком «–», одночлены степени 57 сократятся. Коэффициент при одночленах степени 56 будет равен $1\cdot57-2\cdot57+3\cdot57-\dots+99\cdot57-100\cdot57=-50\cdot57=-2850$.

10. Пете дали многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами. Он поменял некоторые коэффициенты местами и получил многочлен $Q(x)$. Разность $P(2021)-Q(2021)$ оказалась натуральным числом. Какое минимальное значение может иметь эта разность?

Ответ: 2020.

Решение. Суммы коэффициентов $P(x)$ и $Q(x)$ равны, поэтому $P(1)=Q(1)$. Тогда $P(2021)-Q(2021)=\big(P(2021)-P(1)\big)-\big(Q(2021)-Q(1)\big)$.

Коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ — целые числа. Из теоремы Безу о целочисленных многочленах следует, что разности $P(2021)-P(1)$ и $Q(2021)-Q(1)$ кратны 2021 – 1 = 2020. Значит, разность $P(2021)-Q(2021)$ кратна 2020, то есть не менее 2020.

Разность может равняться 2020: для многочленов $P(x)=2x+1$, $Q(x)=x+2$, получаем $P(2021)-Q(2021)=x-1=2021-1=2020$.

11. Пусть $P(x)=3x^3+5x^2+2x+8$. Найдите хотя бы одно целое решение уравнения $P(x)=3050208$.

Ответ: 100

Решение. Сравнив цифры числа 3050208 с коэффициентами данного многочлена, не сложно заметить, что подходит $x=100$.

Комментарий. На самом деле, число 100 — единственный целый корень: $P(x)-3050208=3x^3+5x^2+2x-3050200=(x-100)(3x^2+305x+30502)$, трёхчлен $3x^2+305x+30502$ не имеет действительных корней.

12. Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, а число 3 — его корень. Пусть для некоторого целого t выполняется $P(t)=1$. Чему может быть равно t?

Ответ: 2 или 4.

Решение. Из условия $P(3)=0$, $P(t)=1$. По теореме Безу о целочисленных многочленах $P(t)-P(3)=1$ кратно $t-3$, значит, $t-3=-1$ или $t-3=1$, $t=2$ или $t=4$.

13. При каком значении a остаток от деления x^3+ax+4 на $x+2$ равен 6?

Ответ: −5.

Решение. По теореме Безу при делении $P(x)=x^3+ax+4$ на $x+2$ должен быть остаток 6; поэтому, $P(-2)=6$, откуда $P(-2)=-2a-4=6, a=-5$.

14. Выражение $(3x^4-5x+4)^3-(2x^3+4x^2-2x+6)^2(x^3+8x^2-4x-5)$ преобразовали и привели к стандартному виду многочлена. Найдите сумму его коэффициентов.

Ответ: 8.

Решение. Пусть $P(x)$ — данный многочлен. Сумма его коэффициентов равна $P(1)=(3-5+4)^3-(2+4-2+6)^2(1+8-4-5)=8$.

15. Выражение $(3x^4-5x+4)^3-(2x^3+4x^2-2x+6)^2(x^3+8x^2-4x-5)$ преобразовали и привели к стандартному виду многочлена. Найдите сумму коэффициентов при нечетных степенях.

Ответ: −560.

Решение. Решение. Пусть $P(x)$ — данный многочлен. Сумма его коэффициентов равна $P(1)$. Знакопеременная сумма, где коэффициенты при чётных степенях взяты со знаком «+», с нечётными — со знаком «–», равна $P(-1)$. Искомая сумма равна полуразности первого и второго. Получаем:

$$P(1)=(3-5+4)^3-(2+4-2+6)^2(1+8-4-5)=8,$$

$$P(-1)=(3+5+4)^3-(-2+4+2+6)^2(-1+8+4-5)=-1136,$$

$$\frac{P(1)-P(-1)}{2}=-560.$$

16. Пусть $P(x)=x^{12}-2021x+3$. Найдите свободный член многочлена $P(x+2)$.

Ответ: 57.

Решение. Свободный многочлен равен значению многочлена при $x=0$. Получаем $P(0+2)=P(2)=2^{12}-2021\cdot2+3=4096-4042+3=57$.