Блок 2. Признаки делимости

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. На доске написано число 98765. Антон вставил в его запись одну цифру (в начале, в конце или между какими-то двумя цифрами) и полученное число стало кратно 6. Какую цифру вставил Антон?
2. Василий задумал пятизначное натуральное число и говорит про него такое: «Число кратно 9, в его записи нет одинаковых цифр, а первая его цифра — 2». Какое *наибольшее* число мог быть задумано Василием?
3. Василий задумал пятизначное натуральное число и говорит про него такое: «Число кратно 9, в его записи нет одинаковых цифр, а первая его цифра — 2». Какое *наименьшее* число мог быть задумано Василием?
4. Из цифр 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5 составьте наибольшее натуральное число, кратное 11.
5. Запись натурального числа N, кратного 225, состоит только из цифр «0» и «2». Какое наименьшее количество цифр может быть в записи числа N?
6. На листе бумаги выписывают подряд натуральные числа, получая запись большого числа: 123456789101112…. После того, как приписали число N, на листе впервые появилось число, кратное 225. Чему равно N?
7. Какой цифрой можно заменить звездочку в записи 345∗678, чтобы получилось число, дающее при делении на 9 остаток 4?
8. Даны семь трехзначных чисел 205, 304, 368, 436, 586, 730, 927. Можно взять любые два из них и, приписав их друг к другу, образовать шестизначное число. Найдите все такие шестизначные числа, кратные 13.
9. Есть 4 карточки, на каждой одна цифра. Это цифры 2, 3, 4, 5. Сколько четырёхзначных чисел, кратных 5, можно составить из этих чисел?
10. Есть 5 карточек, на каждой одна цифра. Это цифры 1, 2, 3, 4, 5. Сколько четырёхзначных чисел, кратных 6, можно составить из этих чисел?
11. Сколько четырехзначных чисел, кратных 4, можно составить из цифр 2, 3, 4 и 5? Цифры в числе могут повторяться.
12. Найдите наименьшее число N, у которого сумма цифр равна сумме цифр числа $11N$.
13. Есть 4 карточки, на каждой одна цифра. Это цифры 0, 3, 5, 7. Сколько четырёхзначных чисел, кратных 25, можно составить из этих чисел?

14. Есть 5 карточек. На каждой написана комбинация из 3 цифр. Есть комбинации «102», «221», «323», «424», «544». Лёня взял 4 карточки, приставил их друг к другу и у него получилось 12-значное число, кратное 17. Одна карточка осталась лишней. Какая на ней комбинация?
15. Какой цифрой можно заменить звездочку в записи 34567∗8, чтобы получилось число, кратное 3 и дающее при делении на 4 остаток 2?

Блок 2. Признаки делимости

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания, указания и решения

1. На доске написано число 98765. Антон вставил в его запись одну цифру (в начале, в конце или между какими-то двумя цифрами) и полученное число стало кратно 6. Какую цифру вставил Антон?

   Ответ: 4.

   Решение. Сумма первоначально написанных цифра равна $9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$. Для делимости на 3 надо вставить 1, 4 или 7. С другой стороны, надо в конец поставить чётную цифру. Значит, Антон вставил цифру 4.

2. Василий задумал пятизначное натуральное число и говорит про него такое: «Число кратно 9, в его записи нет одинаковых цифр, а первая его цифра — 2». Какое *наибольшее* число мог быть задумано Василием?

   Ответ: 29871.

   Решение. После первой цифры «2» можно поставить наибольшие из возможных, получим 2987∗. Сумма имеющихся цифр равна $2 + 9 + 8 + 7 = 26$. Для делимости на 9 можно добавить только цифру «1».

3. Василий задумал пятизначное натуральное число и говорит про него такое: «Число кратно 9, в его записи нет одинаковых цифр, а первая его цифра — 2». Какое *наименьшее* число мог быть задумано Василием?

   Ответ: 20169.

   Решение. После первой цифры «2» можно поставить наименьшие из возможных, получим 201∗∗. Сумма имеющихся цифр равна $2 + 0 + 1 = 3$. Для делимости на 9 нельзя сделать сумму всех цифр, равной 9: надо добавить 2 цифры, сумма которых 6, это нельзя сделать двумя разными цифрами, не используя 0, 1 или 2. Тогда сумма двух последних цифр не менее 15. Тогда четвертая цифра не менее 6, последней останется сделать цифру 9. Получаем 20169.

   Комментарий. Было дано много неверных ответов «21348».

4. Из цифр 1, 2, 2, 3, 4, 4, 5 составьте наибольшее натуральное число, кратное 11.

   Ответ: 5242413.

   Решение. Сумма имеющихся цифр равна 21. Суммы цифр на чётных и нечётных местах должны различаться на величину, кратную 11. Значит, одна сумма 16, другая — 5. Сумму 16 можно набрать 3 или 4 цифрами только так: 5, 4, 4, 3.

   Остаётся поставить эти цифры в порядке убывания на нечётные места, а остальные — в порядке убывания на чётные места. Получаем 5242413.

5. Запись натурального числа N, кратного 225, состоит только из цифр «0» и «2». Какое наименьшее количество цифр может быть в записи числа N?

   Ответ: 11

   Решение. Так как $225 = 9 \cdot 25$, то сумма цифр должна быть кратной 9, а последние 2 цифры должны давать сочетание «00», «25», «50» или «75». Значит, число N оканчивается на «00», а количество цифр «2» кратно 9. Наименьшее такое число — 22222222200, в нём 11 цифр.

6. На листе бумаги выписывают подряд натуральные числа, получая запись большого числа: 123456789101112…. После того, как приписали число N, на листе впервые появилось число, кратное 225. Чему равно N?

   Ответ: 125.

   Решение. Число, запись которого получается выписыванием в ряд натуральных чисел от 1 до N, и сумма чисел от 1 до N дают при делении на 9 одинаковые остатки. Действительно, согласно принципу равноостаточности при делении на 9 число 123456789101112… при делении на 9даёт тот же остаток, что и сумма $1 + \ldots + 9 + 1 + 0 + 1 + 1 + 1 + 2 + \ldots$; сумма чисел от 1 до N даёт тот же остаток, что и та же сумма $1 + \ldots + 9 + (1 + 0) + (1 + 1) + (1 + 2) + \ldots$.

   Вывод: надо найти наименьшее N при котором сумма чисел от 1 до N кратна 225.

   Так как $225 = 9 \cdot 25$, для делимости на 25 надо заканчивать числом, кратным 25, то есть $N = 25k$. Тогда сумма $1 + 2 + 3 + \cdots + 25k = (25k + 1) \cdot 25k/2$ кратна 9, откуда k или $25k + 1$ кратно 9. В первом случае минимальное возможное значение $k = 9$; во втором — $k = 5$, в чём нетрудно убедиться перебором.

   Значит, искомое значение — $N = 25k = 25 \cdot 5 = 125$.

   Комментарий. Условие делимости N на 25 понимается быстро. Можно начать считать сумму цифр чисел от 1 до N при значениях N, равных 25, 50, 75, …, пока сумма цифр не будет кратна 9. Такой способ более трудоёмкий, но не требует каких-то сложных идей.

7. Какой цифрой можно заменить звездочку в записи 345∗678, чтобы получилось число, дающее при делении на 9 остаток 4?

   Ответ: 7.

   Решение. Сумма данных цифр равна $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$. Согласно принципу равноостаточности при делении на 9 надо добавить одну цифру, чтобы получить число, которое при делении на 9 даёт остаток 4. Ближайшее к 33 такое число, большее 33, — 40, надо добавить цифру 40 – 33 = 7. Очевидно, других вариантов нет.

8. Даны семь трехзначных чисел 205, 304, 368, 436, 586, 730, 927. Можно взять любые два из них и, приписав их друг к другу, образовать шестизначное число. Найдите все такие шестизначные числа, кратные 13.

Ответ: 368927 и 927368.

Решение. Если a и b — два из данных трёхзначных чисел, то из них можно составить число, равное $1000a + b$. Так как 1001 кратно 13, то $1000a + b = 1001a + (b - a)$ кратно 13, когда $b - a$ кратно 13, то есть a и b дают равные остатки при делении на 13.

Вывод: из данных семи чисел надо выбрать два, дающие равные остатки при делении на 13. Остатки чисел показаны в таблице:

Число	205	304	368	436	586	730	927
Остаток	10	5	4	7	1	2	4

Видно, что можно взять только числа 368 и 927. Записать их друг за другом можно в любом порядке.

9. Есть 4 карточки, на каждой одна цифра. Это цифры 2, 3, 4, 5. Сколько четырёхзначных чисел, кратных 5, можно составить из этих чисел?

Ответ: 6.

Решение. На последнем месте числа стоит 5. На остальные позиции надо поставить оставшиеся 3 цифры в любом из 6 порядков. Итого 6 штук.

10. Есть 5 карточек, на каждой одна цифра. Это цифры 1, 2, 3, 4, 5. Сколько четырёхзначных чисел, кратных 6, можно составить из этих чисел?

Ответ: 12.

Решение. Для делимости на 6 нужна делимость на 3 и на 2.

Сумма данных цифр 1 + 2 + 3 + 4 + 5 кратна 3. Надо использовать 4 цифры, сумма которых кратна 3. Значит, оставшаяся цифра кратна 3. Вывод: надо убрать цифру 3.

На последнем месте числа стоит 2 или 4 (для делимости на 2). На остальные позиции надо поставить оставшиеся 3 цифры в любом из 6 порядков. Итого 12 штук.

11. Сколько четырехзначных чисел, кратных 4, можно составить из цифр 2, 3, 4 и 5? Цифры в числе могут повторяться.

Ответ: 64.

Решение. Для делимости на 4 последние 2 цифры должны образовать число, кратное 4. Из данных цифр есть только 4 таких сочетания: 32, 52, 24, 44. В каждом из этих случаев первые 2 цифры — любые из данных, таких вариантов $4 \cdot 4 = 16$. Итого $4 \cdot 16 = 64$ чисел.

12. Найдите наименьшее число N, у которого сумма цифр равна сумме цифр числа $11N$.

Ответ: 99

Решение. Если суммы цифр чисел N и $11N$ равны, то равны остатки, которые они дают при делении на 9. В таблице для каждого остатка при делении на 9, который может давать N, записан остаток, который будет давать $11N$.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$11N$	0	2	4	6	8	1	3	5	7

Остатки чисел N и $11N$ совпадают только если N кратно 9. Значит, достаточно найти наименьшее число, кратное 9, удовлетворяющее условию задачи.

N	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99
$11N$	99	198	297	396	495	594	693	792	891	990	1089

По таблице видно, что суммы цифр впервые равны для $N = 99$.

13. Есть 4 карточки, на каждой одна цифра. Это цифры 0, 3, 5, 7. Сколько четырёхзначных чисел, кратных 25, можно составить из этих чисел?

Ответ: 3.

Решение. Число, кратное 25, оканчивается на «00», «25», «50» или «75». Из данных карточек можно составить только «50» и «75». В первом случае первыми могут быть цифры 3 и 7 в любом порядке (числа 3750 и 7350), во втором — цифры 0 и 3 можно поставить единственным образом (число 3075). Итого 3 числа.

14. Есть 5 карточек. На каждой написана комбинация из 3 цифр. Есть комбинации «102», «221», «323», «424», «544». Лёня взял 4 карточки, приставил их друг к другу и у него получилось 12-значное число, кратное 17. Одна карточка осталась лишней. Какая на ней комбинация?

Ответ: 424.

Указание. Очевидно, что если составлять число из «частей», кратных 17, то получится число, кратное 17. Это следует, хотя бы, из деления столбиком.

Решение. Заметим, что все комбинации, кроме 424, дают числа, кратные 17. Если из них составить любое число, то оно будет делиться на 17. Вывод: «424» могло быть лишней карточкой.

С другой стороны, предположим, что составили число N из «424» и еще трёх комбинаций. Пусть число M получается из N заменой «424» на «000». Тогда M кратно 17 (его запись состоит из частей, кратных 17, в то числе из «000»). Из этого следует, что разность $N - M = 424 \cdot 10^k$ также кратна 17. Так как НОД (10; 17) = 1, то 424 должно быть кратно 17, что не так. Вывод: «424» обязательно должно быть лишней комбинацией.

15. Какой цифрой можно заменить звездочку в записи $34567{*}8$, чтобы получилось число, кратное 3 и дающее при делении на 4 остаток 2?

    Ответ: 3 или 9.

    Решение. Так как сумма известных цифр кратна 3, то по признаку делимости на 3 и искомая цифра кратна 3. Значит, число оканчивается на «08», «38», «68» или «98». Число при делении на 4 даёт остаток 2, если последние 2 цифры образуют число, которое при делении на 4 даёт тот же остаток 2. Из четырёх сочетаний подходят только «38» и «98». Значит, искомая цифра — 3 или 9.