Блок 3. Графы

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. Центры клеток шахматной доски соединяются отрезком, если из одной клетки в другую можно попасть ровно за два хода конем. Сколько компонент связности у полученного графа?

2. На окружности расположены 150 вершин графа. Две вершины соединены ребром в том и только том случае, когда между ними расположены ровно 3 другие вершины. Сколько компонент связности у этого графа?

3. На окружности расположены 150 вершин графа. Две вершины соединены ребром в том и только том случае, когда между ними расположены ровно 8 других вершин. Сколько компонент связности у этого графа?

4. На праздник в джунглях собралось несколько мартышек и попугаев. Пришедший попугай Кеша дружит с 7 присутствующими мартышками, а попугай Рома — с 8. При этом для любых двух мартышек каждый из присутствующих попугаев дружит хотя бы с одной из них. Сколько мартышек собралось на праздник?

5. В некотором цифровом царстве ровно 90 городов. Они пронумерованы числами от 10 до 99. Два города соединены авиалинией в том и только том случае, когда цифры в одном из разрядов совпадает, а в другом — отличаются на 3. Какое наибольшее количество городом можно выбрать, чтобы никакие два из них не были связаны авиаперелетами (пусть даже с пересадками в других городах страны)?

6. На пленэр собрались 8 художников, каждый из них нарисовал один пейзаж. Во-первых, каждому участнику понравилось ровно N пейзажей других участников пленэра. Во-вторых, нашлись три таких художника, что первому понравилась работа второго, второму — работа третьего, а третьему — работа первого. Найдите наименьшее возможное значение N.

7. Дом состоит из одинаковых треугольных комнат, расположенных в виде треугольника, как показано на рисунке. В каждой стене между комнатами есть запертая дверь. Сколько минимум дверей нужно открыть, чтобы можно было пройти из любой комнаты в любую другую?

8. В графе 100 вершин, они пронумерованы числами от 1 до 100. Две вершины соединены ребром, если их номера различаются в 1,5 раза. Сколько вершин этого графа имеют степень 1?

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2021–2022 учебный год

9. В графе 100 вершин. Он состоит из 13 компонент связности. Какое наименьшее количество ребер может быть в таком графе?

10. В графе 57 вершин. Он состоит из 6 компонент связности. Какое наибольшее количество ребер может быть в таком графе?

11. На заседание в парламенте собрались депутаты. Каждый каждому либо друг, либо враг. Известно, что действуют два правила: «друг моего друга — мой друг» и «враг моего врага — мой друг». Известно, что у каждого число врагов на одно и то же количество больше числа друзей. На сколько больше?

12. В графе 10 вершин. Одна — степени 4, две — степени 3, три — степени 2 и четыре степени 1. Какое наибольшее число компонент связности может быть у такого графа?

13. В Графляндии N городов. Между любыми двумя городами есть одна дорога, дороги не пересекаются и не проходят через другие города. Три графа совершили путешествия. Каждое проходит по всем городам только по дорогам (при этом можно побывать в некоторых городах по несколько раз). Они одна дорога не входила в маршрут двух графов. При каком наименьшем N такое возможно?

14. В графе 10 вершин. Одна — степени 4, две — степени 3, три — степени 2 и четыре степени 1. Можно убрать N ребер так, что оставшийся граф будет деревом. Найдите N.

15. Граф является деревом. В нем 100 вершин степени 1. Остальные N вершин имеют степень 3. Найдите N.

Блок 3. Графы

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания, указания и решения

Содержание интернет-карусели по теме «Графы» для 8 классов согласовано с программой проекта «Математическая вертикаль» (г. Москва). На занятия 8 классов выносятся темы «Общие понятия теории графов», «Связные графы», «Деревья». В качестве дополнительных тем предлагаются «Планарные графы», «Обходы графы, эйлеровы графы».

В условиях заданий карусели давались определения используемых терминов теории графов. *Граф* состоит из *вершин*, любые две из которых либо соединены одним *ребром*, либо не соединены. *Степень вершины* — количество выходящих из неё ребер. Две вершины *связны*, если есть путь по ребрам от одной вершины до другой. *Компонента связности* графа — это часть вершин графа (и ребра между ними), которые попарно связны между собой, но не связны с вершинами вне этой части. *Дерево* — граф с наименьшим числом ребер, у которого любые две вершины связны.

При решении используются следующие утверждения.

- В любом графе сумма степеней вершин равна удвоенному числу рёбер.
- Связный граф с минимальным числом ребер — это дерево. В нем число вершин превосходит число ребер на 1.
- В графе каждая компонента связности с n вершинами имеет минимум $n-1$ ребро и максимум $n(n-1)/2$ ребер.

1. Центры клеток шахматной доски соединяются отрезком, если из одной клетки в другую можно попасть ровно за два хода конем. Сколько компонент связности у полученного графа?

   Ответ: 2.

   Решение. Каждым ходом конь меняет цвет клетки шахматной доски, на которой стоит. Поэтому, отрезком соединяют клетки одного цвета. Клетки разного цвета не связны между собой.

   С другой стороны, очевидно конь может попасть с любой клетки на любую другую клетку того же цвета, причём делает это за чётное число шагов. Значит, любые две клетки одного цвета связаны путем по указанным в условии отрезкам.

   Вывод: граф имеет 2 компоненты, одна компонента — все белые клетки шахматной доски, вторая — все чёрные.

2. На окружности расположены 150 вершин графа. Две вершины соединены ребром в том и только том случае, когда между ними расположены ровно 3 другие вершины. Сколько компонент связности у этого графа?

   Ответ: 2.

   Решение. Пронумеруем вершины по порядку числами от 1 до 150. Вершина № 1 соединена с № 5, № 5 — с № 9 и так далее до вершины № 149 (эти номера дают остаток 1 при делении на 4). Далее № 149 соединен с № 3, № 3 — с № 7 и так далее до вершины № 147 (эти номера дают остаток 3 при делении на 4), которая соединена с вершиной № 1.

   Вывод: все вершины с нечётными номерами (то есть все вершины, стоящие через одну) образуют одну компоненту связности. Аналогично вершины с чётными номерами (также все вершины, стоящие через одну) образуют другую компоненту связности. Всего 2 компоненты.

3. На окружности расположены 150 вершин графа. Две вершины соединены ребром в том и только том случае, когда между ними расположены ровно 8 других вершин. Сколько компонент связности у этого графа?

   Ответ: 3.

   Решение. Пронумеруем вершины по порядку числами от 1 до 150.

   Рассмотрим вершины, с которыми соединена вершина № 1:
   № 1 — № 10 — … (номера, дающие при делении на 9 остаток 1) … — № 145 —
   — № 4 — … (номера, дающие при делении на 9 остаток 4) … — № 148 —
   — № 7 — … (номера, дающие при делении на 9 остаток 5) … — № 142 — № 1.

   В компоненте с № 1 все вершины с номерами, дающими при делении на 3 остаток 1, то есть каждая третья вершина. Значит, аналогично, с вершиной № 2 в одной компоненте все вершины с номерами, дающими при делении на 3 остаток 2; с вершиной № 3 в одной компоненте все вершины с номерами, кратными 3.

   Всего 3 компоненты.

   Комментарий. Пусть на окружности n вершин, ребром соединены вершины, между которыми ровно $k-1$ других вершин. Тогда будет НОД $(n;k)$ компонент.

4. На праздник в джунглях собралось несколько мартышек и попугаев. Пришедший попугай Кеша дружит с 7 присутствующими мартышками, а попугай Рома — с 8. При этом для любых двух мартышек каждый из присутствующих попугаев дружит хотя бы с одной из них. Сколько мартышек собралось на праздник?

   Ответ: 8.

   Решение. Не более одной мартышки не дружит с Кешей (иначе с этими двумя не дружит один из попугаев). Значит, всего не более 8 мартышек. Так как Рома дружит с 8 мартышками, то мартышек не менее 8. Вывод: мартышек 8 штук.

5. В некотором цифровом царстве ровно 90 городов. Они пронумерованы числами от 10 до 99. Два города соединены авиалинией в том и только том случае, когда цифры в одном из разрядов совпадает, а в другом — отличаются на 3. Какое наибольшее количество городом можно выбрать, чтобы никакие два из них не были связаны авиаперелетами (пусть даже с пересадками в других городах страны)?

Ответ: 9.

Указание. На языке графов условие задачи звучит следующим образом.

Каждая вершина графа — двузначное число от 10 до 99. Вершины соединены ребром, если одна цифры в одном из разрядов совпадают, а в другом отличаются на 3. Сколько компонент связности у данного графа?

Решение. Обозначим каждый город одним из 9 кодов 00, 01, 02, 10, 11, 12, 20, 21 и 22 по остатку, который даёт каждая из цифр при делении на 3. Города с одним кодом связаны, с разными — нет.

Если выбрать не менее 10 городов, то два из них окажутся с один кодом — они связаны между собой. Если выбрать 9 городов с попарно различными кодами, то никакие два из них не связаны. Вывод: искомое количество городов равно 9.

Комментарий. Представим неверное решение данной задачи.

Согласно признаку делимости на 3 (принципу равноостаточности), соединены города, номера которых дают одинаковый остаток при делении на 3 (так как их суммы цифр отличаются на 3). Значит, связаны между собой все города с остатком 0, все — с остатком 1 и все — с остатком 2. Из каждой части можно выбрать не более одного города. Искомая величина — 3.

Ошибка состоит в том, что описаны 3 несвязанные между собой части, но не доказано, что каждая из них одна компонента связности. На самом деле, каждая такая часть состоит из 3 компонент, что следует из верного решения выше.

6. На пленэр собрались 8 художников, каждый из них нарисовал один пейзаж. Во-первых, каждому участнику понравилось ровно N пейзажей других участников пленэра. Во-вторых, нашлись три таких художника, что первому понравилась работа второго, второму — работа третьего, а третьему — работа первого. Найдите наименьшее возможное значение N.

Ответ: 5.

Решение. Пусть четверо нарисовали лес, а другие четверо — поле; при этом каждому рисовавшим лес понравилось N пейзажей с полем, а рисовавшим поле — N пейзажей с лесом. Тогда для любого $N \le 4$ указанных троих художников не найдётся. Действительно, среди любых трёх будут двое, нарисовавших одно и то же, и им работы друг друга не нравятся.

Покажем, что при $N = 5$ такие три художника найдутся.

Если каждому понравилось 5 картин, то найдётся картина художника (пусть он № 1), которая понравилась по крайней мере пятерым художниками (пусть они № 2, …, № 6). Рассмотрим 2 случая.

(1) Художнику № 1 понравилась работа художника № 7. Тогда тому должна понравиться картина одного из художников от № 2 до № 6. Тогда образуется искомый «треугольник».

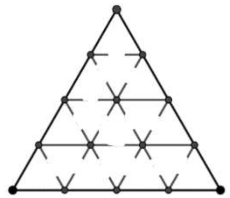
(2) Художнику № 1 понравились картины только художников № 2, …, № 6. Тогда художнику № 2 должна понравиться картина одного из художников № 3, …, № 6 — этот художник вместе с № 1 и № 2 образуют искомый «треугольник».

7. Дом состоит из одинаковых треугольных комнат, расположенных в виде треугольника, как показано на рисунке. В каждой стене между комнатами есть запертая дверь. Сколько минимум дверей нужно открыть, чтобы можно было пройти из любой комнаты в любую другую?

Ответ: 15.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — комнаты, ребро соединяет комнаты, между которыми есть открытая дверь. Всего 16 вершин. Связный граф на 16 вершинах имеет не менее 15 ребер.

С другой стороны, можно достигнуть цель, открыв 15 дверей между комнатами, как показано на рисунке справа.



8. В графе 100 вершин, они пронумерованы числами от 1 до 100. Две вершины соединены ребром, если их номера различаются в 1,5 раза. Сколько вершин этого графа имеют степень 1?

Ответ: 33.

Решение. Каждая вершина соединена не более чем с 2 другими вершинами (чьи номера больше или меньше в 1,5 раза), то есть имеет степень 0, 1 или 2. Вершина имеет степень 1 в двух случаях: номер можно умножить на 3/2, но нельзя умножить на 2/3, или наоборот.

Если номер можно умножить на 3/2, то это — чётное число не более 66.

Если номер можно умножить на 2/3, то это число, кратное 3.

В первом случае подходят четные числа, не кратные 3, от 2 до 64: 2 и 4, 8 и 10, …, 62 и 64. Их 22 штуки.

Во втором случае подойдут числа от 67 до 100, кратные 3: 69, 72, …, 99. Их 11 штук.

Итого 22 + 11 = 33 штуки.

9. В графе 100 вершин. Он состоит из 13 компонент связности. Какое наименьшее количество ребер может быть в таком графе?

Ответ: 87.

Решение. В каждой компоненте связности с n вершинами не менее $n - 1$ ребра. Значит, если всего 100 вершин и 13 компонент, то ребер не менее 100 – 13 = 87.

Ровно 87 ребер, когда каждая из компонент связности является деревом. Действительно, если 13 компонент-деревьев с вершин $\text{В}_1, \text{В}_2, \dots, \text{В}_{13}$ вершинами и соответственно с $\text{Р}_1, \dots, \text{Р}_{13}$ ребрами, то $\text{В}_1 + \text{В}_2 + \dots + \text{В}_{13} = 100$, $\text{Р}_1 + \dots + \text{Р}_{13} = (\text{В}_1 - 1) + \dots + (\text{В}_{13} - 1) = 100 - 13 = 87$.

Комментарий. Граф, в котором каждая компонента связности является деревом, называют *лесом*. Не трудно показать, что если лес состоит из В вершин, Р ребер и имеет К компонент связности, то В – Р = К.

10. В графе 57 вершин. Он состоит из 6 компонент связности. Какое наибольшее количество ребер может быть в таком графе?

Ответ: 1326.

Решение. Предположим, в графе есть 2 компоненты с ребрами: в одной — a вершин, в другой — b вершин, пусть $a \geq b$.

Переместим одну вершину из второй компоненты в первую. Тогда во второй компоненте пропадет $b - 1$ ребро, в первой компоненте возникнет a ребер. Количество ребер увеличилось, так как $a > b - 1$. Значит, такой граф не имеет наибольшего количества ребер.

Единственный граф, не удовлетворяющий указанному свойству (иметь 2 компоненты с ребрами) — это граф, в котором все компоненты, кроме одной, — изолированные вершины. В этом случае будет наибольшее число ребер.

В графе с 5 изолированными вершинами и всевозможными ребрами между оставшимися 52 вершинами будет $52 \cdot 51 : 2 = 1326$ ребер.

11. На заседание в парламенте собрались депутаты. Каждый каждому либо друг, либо враг. Известно, что действуют два правила: «друг моего друга — мой друг» и «враг моего врага — мой друг». Известно, что у каждого число врагов на одно и то же количество больше числа друзей. На сколько больше?

Ответ: 1.

Решение. Рассмотрим граф, в котором вершины — депутаты, а ребром соединены вершины, соответствующие депутатам-друзьям.

Если «друг моего друга — мой друг», то каждая компонента связности графа является полным графом (в ней проведены все возможные ребра).

Если «враг моего врага — мой друг», то компонент связности не более двух (иначе правило не выполняется для трёх депутатов из разных компонент).

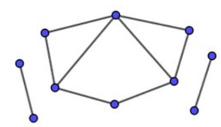
Пусть в одной компоненте A вершин, в другой — B вершин. Из условия, у каждого разность числа врагов и числа друзей одна и та же. Для депутата из первой компоненты она равна $B - (A - 1)$, для депутата из второй компоненты — $A - (B - 1)$. Если $B - (A - 1) = A - (B - 1)$, откуда $A = B$.

Тогда искомая величина равна $B - (A - 1) = 1$.

12. В графе 10 вершин. Одна — степени 4, две — степени 3, три — степени 2 и четыре степени 1. Какое наибольшее число компонент связности может быть у такого графа?

Ответ: 3.

Решение. Компонента связности с вершиной степени 4 содержит не менее 5 вершины. Если остальные 5 вершин образуют не менее 3 компонент, то должна быть изолированная (степени 0) вершина, а такой нет. Значит, оставшиеся пять вершин не более чем в 2 компонентах, всего не более 3 компонент.



Граф с 3 компонентами, удовлетворяющий условию, существует. Он показан на рисунке справа.

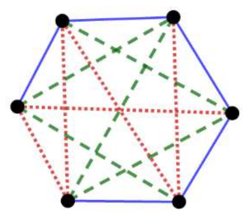
13. В Графляндии N городов. Между любыми двумя городами есть одна дорога, дороги не пересекаются и не проходят через другие города. Три графа совершили путешествия. Каждое проходит по всем городам только по дорогам (при этом можно побывать в некоторых городах по несколько раз). Они одна дорога не входила в маршрут двух графов. При каком наименьшем N такое возможно?

Ответ: 6.

Решение. Нет дороги, по которой ехали какие-то два графа из трёх. Значит, есть по крайней мере 3 дороги и, как следствие, по крайней мере 3 города.

Тогда для некоторого графа найдётся город, который не был стартом или финишем. Тогда она проехал по 2 дорогам, идущим из этого города. Для двух других графов надо еще не менее 2 дорог. Вывод: из этого города выходит не менее 4 дорог, всего не менее 5 городов.

Тогда есть город, который, который не был стартом или финишем хотя бы для двух графов. Для каждого из них из города выходит хотя бы 2 дороги, а еще хотя бы 1 дорога должна быть для третьего графа. Вывод: из этого города выходит не менее 5 дорог, всего не менее 6 городов.



Для 6 городов такое возможно. На рисунке справа показаны возможные маршруты.

14. В графе 10 вершин. Одна — степени 4, две — степени 3, три — степени 2 и четыре степени 1. Можно убрать N ребер так, что оставшийся граф будет деревом. Найдите N.

Ответ: 1.

Решение. Сумма степеней вершин графа равна $4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 20$, в нём $20 : 2 = 10$ ребер. Для связности достаточно 9 ребер, поэтому $N = 10 - 9 = 1$.

15. Граф является деревом. В нем 100 вершин степени 1. Остальные N вершин имеют степень 3. Найдите N.

Ответ: 98.

Решение. Сумма степеней вершин равна $100 + 3N$, значит, в графе $(100 + 3N) : 2$ ребер. Всего $100 + N$ вершин. В дереве число вершин на 1 больше числа ребер. Поэтому выполнено $(100 + 3N) : 2 + 1 = 100 + N$, откуда $N = 98$.