Блок 13. Подсчёт двумя способами

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. Одна и та же группа пятиклассников по понедельникам ходит играть в «Что? Где? Когда?», где образуют 6 команды по 6 человек. Сегодня они все вместе решили пойти играть в интернет-карусель и образовали команды по 4 человека. Сколько команд получилось?

2. Расставьте числа в клетки таблицы, чтобы в каждой строке сумма чисел была одна и та же и в каждом столбике сумма чисел тоже была одинаковой. Какое число окажется в клетке, отмеченной крестиком?

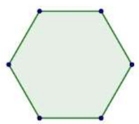
2	4	5	1
3			2
	X	1	

3. Артем вписал в каждую ячейку таблицы 3×3 натуральное число. Он нашёл сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Среди этих 6 сумм не нашлось равных. Сумма всех чисел в таблице равна S. Какое наименьшее значение может иметь S?

4. В лагерь приехали пятиклассники, шестиклассники и семиклассники. На открытии каждый пятиклассник пожал руку 6 шестиклассникам и 3 семиклассникам, каждый семиклассник пожал руку 5 пятиклассникам и 5 шестиклассникам, а каждый шестиклассник пожал руку 4 пятиклассникам и N семиклассникам. Чему может быть равно N?

5. В конференции участвовали 15 ученых. По окончании они стали писать друг другу письма. Ученый Б отправил 2 письма, ученый В отправил 4 письма, ученый Г отправил 6 писем. Остальные участники также отправили каждый по 2, 4 или 6 писем остальным. Известно, что каждый участник получил одинаковое количество писем. Сколько именно?

6. Стороны шестиугольника в некотором порядке занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. В каждой вершине написали сумму номеров сторон, выходящих из этой вершины. В пяти вершинах получились числа 5, 6, 7, 9, 10. Какое число получилось в шестой вершине?



7. Каждая ячейка таблицы 5×5 либо пустая, либо в ней лежит одна монета. В любых четырёх ячейках, образующих квадрат 2×2, ровно 2 монеты. Сколько монет может быть во всей таблице?

8. На столе лежат 25 карточек, на каждой из них написано натуральное число. Какие бы две карточки не взял Тима, его брат Лёня может дать ему еще две карточки так, что сумма на четырёх выбранных карточках будет не менее 10. Какое наименьшее значение может иметь сумма всех чисел на карточках?

9. Петя прошёл пешком от дома до маяка, не останавливаясь и с постоянной скоростью. После 2 км пути он достал шоколадный батончик, еще через 2 км — еще один и так далее. Когда он решил достать очередной батончик, оказалось, что к маяку он уже пришёл, а все 5 батончиков он уже съел. Также по дороге он пил воду: после 3 км пути он достал первую бутылку, после еще 3 км — вторую и так далее. Когда он решил достать очередную бутылку, оказалось, что их не осталось, а к маяку он уже пришёл. Сколько бутылок воды взял с собой Петя?

10. На каждой грани куба записано число. Можно спросить, указав на ребро куба, каковы сумма граней, которые граничат по этому ребру, и получить ответ. Сколько вопросов достаточно, чтобы узнать сумму чисел на всех гранях куба?

11. Братья Лёня и Тима одновременно начали делать свои домашние задания и одновременно закончили. Каждый делал задания по математике, русскому языку и географии. Лёня на математику потратил треть времени, на географию — четверть, а на русский языку — оставшиеся 1 час 10 минут. У Тимы на географию ушла седьмая часть всего времени. Треть остального времени Тима потратил на русский язык. Сколько минут у него ушло на математику?

12. Лёня смог разрезать клетчатую фигуру на 12 уголков из 3 клеток, а Тима эту же фигуру — на квадратики из 2×2. Сколько квадратиков получил Тима?

13. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел будет равна S. Найдите S, если такое возможно.

14. Имеется пустой квадрат 8×8. Сначала Олег выбирает некоторую клетку и записывает в нее число ее соседей (по стороне). Затем он выбирает другую клетку, и записывает в нее число ее соседних клеток, в которых еще не записано никакого числа. Потом выбирает следующую клетку, снова записывает число ее пустых соседей и так далее, пока не останется одна пустая клетка. Чему может равняться сумма записанных чисел?

15. Прямой забор установлен на 14 столбах. Каждый пролёт между столбами синий или красный. Каждый два соседних разного цвета. Первый пролёт — красный. Сколько синих пролётов?

Блок 13. Подсчёт двумя способами

Интернет-карусель (2021–2022)

Указания и решения

В решениях большей части задач рассматривается какая-то величина, о которой напрямую не спрашивается. Она считается двумя способами, что приводит е решению, либо является важным промежуточным звеном от данных величин к искомым.

1. Одна и та же группа пятиклассников по понедельникам ходит играть в «Что? Где? Когда?», где образуют 6 команды по 6 человек. Сегодня они все вместе решили пойти играть в интернет-карусель и образовали команды по 4 человека. Сколько команд получилось?

   Ответ: 9.

   Решение. Эта группа пятиклассников состоит из $6 \cdot 6 = 36$ человек. Для участия в интернет-карусели они образовали $36 : 4 = 9$ команд.

2. Расставьте числа в клетки таблицы, чтобы в каждой строке сумма чисел была одна и та же и в каждом столбике сумма чисел тоже была одинаковой. Какое число окажется в клетке, отмеченной крестиком?

2	4	5	1
3			2
	X	1	

   Ответ: 1.

   Решение. Сумма в первой строке равна $2 + 4 + 5 + 1 = 12$. Значит, сумма чисел во всей таблице должна быть равной $12 \cdot 3 = 36$, сумма в каждом столбце равна $36 : 4 = 9$.

   Тогда недостающее число в первом столбце — $9 – 2 – 3 = 4$, в третьем столбце — $9 – 5 – 1 = 3$, в четвертом — $9 – 1 – 2 = 6$.

   Найдем числа во втором столбце: во второй строке стоит $12 – 3 – 3 – 2 = 4$, в третьей — $12 – 4 – 1 – 6 = 1$.

2	4	5	1
3			2
		1	

→

2	4	5	1
3		3	2
4		1	6

→

2	4	5	1
3	4	3	2
4	1	1	6

   Искомое число — 1.

3. Артем вписал в каждую ячейку таблицы 3×3 натуральное число. Он нашёл сумму чисел в каждой строке и в каждом столбце. Среди этих 6 сумм не нашлось равных. Сумма всех чисел в таблице равна S. Какое наименьшее значение может иметь S?

   Ответ: 17.

   Решение. Суммы во всех строках и столбцах вместе дают не менее $3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$. Каждое число в ячейке учитывается 2 раза. Значит, сумма чисел в таблице не менее $33 : 2$, то есть не менее 17.

1	2	4	7
1	2	3	6
1	1	2	4
3	5	9	

   Сумма 17 возможна, пример показан на рисунке справа.

   Комментарий. Верный ответ дали 62 команды, ответ «18» — 34 команды, еще 28 команд указали ответы «19», «20» и «21».

4. В лагерь приехали пятиклассники, шестиклассники и семиклассники. На открытии каждый пятиклассник пожал руку 6 шестиклассникам и 3 семиклассникам, каждый семиклассник пожал руку 5 пятиклассникам и 5 шестиклассникам, а каждый шестиклассник пожал руку 4 пятиклассникам и N семиклассникам. Чему может быть равно N?

   Ответ: 2.

   «Решение». Каждый пятиклассник пожал руку 3 семиклассникам, каждый семиклассник — 5 шестиклассникам, каждый шестиклассник — 4 пятиклассникам.

   Каждый пятиклассник пожал руку 6 шестиклассникам, каждый шестиклассник — N семиклассникам, каждый семиклассник — 5 пятиклассникам.

   Так как в первом и втором случае речь идёт об одних и тех же рукопожатиях, то $3 + 5 + 4 = 6 + N + 5$, откуда $N = 1$.

   Решение. Рассмотрим пары классов: 5–6, 7–5 и 6–7.

   (5–6) Каждый пятиклассник пожал руку 6 шестиклассникам, а каждый шестиклассник — 4 пятиклассникам. Пятиклассников в 6 раз меньше, чем число их рукопожатий между 5 и 6 классами, шестиклассников — в 4 раза меньше, чем то же количество. Значит, количество учеников 5 и 6 классов относится как $4 : 6$ или $2 : 3$.

   (7–5) Каждый семиклассник пожал руку 5 пятиклассникам, пятиклассник —3 семиклассникам. Рассуждая аналогично, получаем: количество учеников 5 и 7 классов относится как $5 : 3$.

   Из полученных соотношений следует, что количество учеников 5, 6 и 7 классов относятся как $10 : 15 : 6$.

   (6–7) Каждый семиклассник пожал руку 5 шестиклассникам, каждый шестиклассник — N семиклассникам. Количество учеников 6 и 7 классов относится как $15 : 6$ или $5 : 2$. Рассуждая как выше, получаем $N = 2$.

5. В конференции участвовали 15 ученых. По окончании они стали писать друг другу письма. Ученый Б отправил 2 письма, ученый В отправил 4 письма, ученый Г отправил 6 писем. Остальные участники также отправили каждый по 2, 4 или 6 писем остальным. Известно, что каждый участник получил одинаковое количество писем. Сколько именно?

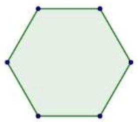
   Ответ: 4.

   Решение. Отправлено чётное количество писем, так как каждый отправил чётное число (2, 4 или 6). Это количество не менее $12 \cdot 2 + 2 + 4 + 6 = 36$, но не более $12 \cdot 6 + 2 + 4 + 6 = 84$ писем.

   Это количество кратно 15, так как все 15 учёных получили поровну писем.

   От 36 до 84 только одно чётное число, кратное 15 — это 60. Значит, каждый учёный получил $60 : 15 = 4$ письма.

6. Стороны шестиугольника в некотором порядке занумерованы числами 1, 2, 3, 4, 5, 6. В каждой вершине написали сумму номеров сторон, выходящих из этой вершины. В пяти вершинах получились числа 5, 6, 7, 9, 10. Какое число получилось в шестой вершине?



   Ответ: 5.

   Решение. Каждое число на стороне участвует как слагаемое в суммах двух вершин. Поэтому сумма чисел в вершинах вдвое больше чисел на сторонах, то есть она равна $2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 42$.

   Значит, искомое число равно $42 - (5 + 6 + 7 + 9 + 10) = 5$.

7. Каждая ячейка таблицы 5×5 либо пустая, либо в ней лежит одна монета. В любых четырёх ячейках, образующих квадрат 2×2, ровно 2 монеты. Сколько монет может быть во всей таблице?

   Ответ: 10, 11, 12, 13, 14, 15.

   Решение. На рисунках ниже показано, как могло быть расположено 10, 11, 12, 13, 14 или 15 монет.

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

10

1				
	1	1	1	1
1				
	1	1	1	1
1				

11

1		1		
	1		1	1
1		1		
	1		1	1
1		1		

12

1		1		1
	1		1	
1		1		1
	1		1	
1		1		1

13

1		1	1	1
	1			
1		1	1	1
	1			
1		1	1	1

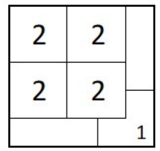
14

1	1	1	1	1
1	1	1	1	1
1	1	1	1	1

15

Покажем, что менее 10 и более 15 монет расположить невозможно.

Предположим, на доске удалось разместить 9 (или менее) монет. Разделим доску на 7 частей, четыре из которых — квадраты 2×2, как показано на рисунке справа. В каждом квадрате расположено 2 монеты. Часть в форме уголка должна содержать хотя бы одну монету, иначе в квадрате 2×2 в правом нижнем углу не будет двух монет. Значит, в оставшихся двух частях 1×3 нет монет.



Отметим пустые клетки нулями, тогда определяются 6 клеток, в которых монеты должны быть (рисунок справа).

			1	0
			1	0
			1	0
1	1	1	X	
0	0	0		

Рассмотрим клетку, отмеченную крестиком. Если в ней есть монета, то получается квадрат 2×2 с тремя монетами. Если в ней нет монеты, то в квадрате 2×2 в правом нижнем углу будет только одна монета. Противоречие.

Предположим, на доске удалось разместить 16 (или более) монет. Получим «противоположную» расстановку монет: в пустые клетки поставим монеты, а из клеток, где изначально были монеты, их уберем. Тогда в каждом квадрате 2×2 снова будет ровно 2 монеты. Если было не менее 16 монет, то станет не более $25 - 16 = 9$ монет. Но уже доказано, что расстановки с не более чем 9 монетами не существует.

Комментарий 1. Обратите внимание, что аналогичная задача для квадрата с чётной стороной менее интересна. Например, поле 6×6 можно разбить на 9 непересекающихся квадратов 2×2, поэтому общее число монет всегда равно $2 \cdot 9 = 18$.

Комментарий 2. Рекомендуем не только самостоятельно поискать примеры для 10, ..., 15 монет, но и найти разные примеры. Затем эти примеры можно разбить на пары «противоположных», как указано в конце решения.

8. На столе лежат 25 карточек, на каждой из них написано натуральное число. Какие бы две карточки не взял Тима, его брат Лёня может дать ему еще две карточки так, что сумма на четырёх выбранных карточках будет не менее 10. Какое наименьшее значение может иметь сумма всех чисел на карточках?

Ответ: 31.

Решение. Сумма на выбранных четырех карточках не менее 10, на остальных 25 – 4 = 21 карточке — не менее 21, сумма всех чисел не менее 10 + 21 = 31.

С другой стороны, сумма моет быть 31. Пусть на двух карточках числа 4, на остальных 23 карточках — числа 1; 4 + 4 + 23 = 31. Лёня всегда может сделать так, что у Тимы на руках будут карточки 1, 1, 4, 4.

9. Петя прошёл пешком от дома до маяка, не останавливаясь и с постоянной скоростью. После 2 км пути он достал шоколадный батончик, еще через 2 км — еще один и так далее. Когда он решил достать очередной батончик, оказалось, что к маяку он уже пришёл, а все 5 батончиков он уже съел. Также по дороге он пил воду: после 3 км пути он достал первую бутылку, после еще 3 км — вторую и так далее. Когда он решил достать очередную бутылку, оказалось, что их не осталось, а к маяку он уже пришёл. Сколько бутылок воды взял с собой Петя?

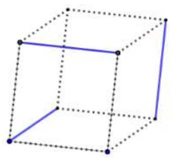
Ответ: 3.

Решение. Пять съеденных батончиков «говорят» о том, что весь путь — это 6 промежутков по 2 км, его длина 6 · 2 = 12 км. Он разбивается на 4 куска по 3 км, между которыми 3 «стыка», на которых Петя вытаскивал бутылки. Значит, всего было 3 бутылки.

10. На каждой грани куба записано число. Можно спросить, указав на ребро куба, каковы сумма граней, которые граничат по этому ребру, и получить ответ. Сколько вопросов достаточно, чтобы узнать сумму чисел на всех гранях куба?

Ответ: 3.

Решение. Если спросить про одно или два ребра, то будут грани, число на которых не входит ни в одну из сумм. Тогда узнать сумму на гранях невозможно.



Если спросить суммы на трёх ребрах, выделенных на рисунке справа, и сложить их, то каждое число на грани войдёт в сумму 1 раз. Значит, она и будет суммой всех чисел на гранях.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2021–2022 учебный год

11. Братья Лёня и Тима одновременно начали делать свои домашние задания и одновременно закончили. Каждый делал задания по математике, русскому языку и географии. Лёня на математику потратил треть времени, на географию — четверть, а на русский языку — оставшиеся 1 час 10 минут. У Тимы на географию ушла седьмая часть всего времени. Треть остального времени Тима потратил на русский язык. Сколько минут у него ушло на математику?

Ответ: 96.

Решение. Поделим время, потраченное Лёней, на 12 равных частей. Тогда 4 части им потрачено на математику, 3 части — на географию, остальные 12 – 4 – 3 = 5 частей составляют 1 час 10 минут или 70 минут. Всего на домашнее задание потрачено 70 : 5 · 12 = 12 · 14 = 168 минут.

У Тимы на географию ушло 12 · 14 : 7 = 24 минуты, осталось 168 – 24 = 144. На русский язык потрачено 144 : 3 = 48, остальные 144 – 48 = 96 минут — на математику.

12. Лёня смог разрезать клетчатую фигуру на 12 уголков из 3 клеток, а Тима эту же фигуру — на квадратики из 2×2. Сколько квадратиков получил Тима?

Ответ: 9.

Решение. Фигура состоит из 12 · 3 = 36 клеток, получилось 36 : 4 = 9 квадратов.

13. Барон Мюнхгаузен утверждает, что может вписать в клетки доски 8×8 различные числа от 1 до 64 так, что в любом квадрате 2×2 сумма чисел будет равна *S*. Найдите *S*, если такое возможно.

Ответ: 130.

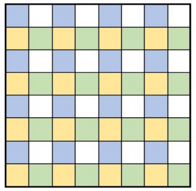
Решение. Числа можно расставить как, например, показано на рисунке.

32	37	24	45	16	53	8	61
33	28	41	20	49	12	57	4
31	38	23	46	15	54	7	62
34	27	42	19	50	11	58	3
30	39	22	47	14	55	6	63
35	26	43	18	51	10	59	2
29	40	21	48	13	56	5	64
36	25	44	17	52	9	60	1

Сумма чисел в таблице равна (1 + 64) + (2 + 63) + ... + (32 + 33) = 32 · 65. Квадрат можно разбить на 64 : 4 = 16 непересекающихся квадратов 2×2. Сумма в каждом равна 32 · 65 : 16 = 130.

Замечание. Построить пример нужной расстановки чисел довольно не просто. В приведенном примере поле раскрашено в шахматном порядке. В клетках одного цвета по порядку расставлены числа от 1 до 32, а в клетках другого цвета — числа от 33 до 64 в обратном порядке.

Можно получить и другой пример. Раскрасим доску в 4 цвета, как показано на рисунке, и разобьем числа на группы 1–16, 17–32, 33–48 и 49–64. В клетки двух цветов поставим числа в порядке возрастания (аналогично приведенному выше примеру), в двух других — по убыванию.



Постарайтесь получить такой пример (и проверить его) самостоятельно.

Комментарий. Во время соревнования верный ответ дали 67 команд, около 90 команд не поверили, что такое невозможно.

14. Имеется пустой квадрат 8×8. Сначала Олег выбирает некоторую клетку и записывает в нее число ее соседей (по стороне). Затем он выбирает другую клетку, и записывает в нее число ее соседних клеток, в которых еще не записано никакого числа. Потом выбирает следующую клетку, снова записывает число ее пустых соседей и так далее, пока не останется одна пустая клетка. Чему может равняться сумма записанных чисел?

Ответ: 112.

Решение. Можно считать, что Олег таким образом подсчитывает число перегородок между клетками квадрата. Всего таких перегородок $2 \cdot 7 \cdot 8 = 112$ (семь рядов горизонтальных по 8 штук и столько же вертикальных). Значит, сумма чисел в клетках всегда будет равной 112.

15. Прямой забор установлен на 14 столбах. Каждый пролёт между столбами синий или красный. Каждый два соседних разного цвета. Первый пролёт — красный. Сколько синих пролётов?

Ответ: 6.

Решение. Всего $14 - 1 = 13$ пролётов. Если первый — красный, значит, на заборе 7 красных и 6 синих пролётов.