Блок 4. Многоугольники

Интернет-карусель (2021–2022)

Задания

1. Равные отрезки OA, OB и OC таковы, что $\angle AOB = 110°$, $\angle BOC = 130°$, $\angle COA = 120°$. Точки K, L, M таковы, что четырёхугольники $OAKB$, $OBMC$, $OCLA$ — ромбы. Найдите величину меньшего из углов шестиугольника $AKBMCL$.

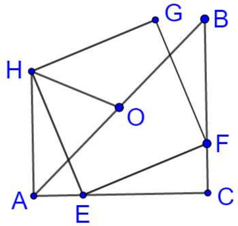
2. Дан ромб $ABCD$, угол A — тупой. На сторонах AB и AD ромба нашлись соответственно точки P и Q такие, что треугольник PCQ — равносторонний, сторона которого равна стороне ромба. Найдите величину угла B данного ромба.

3. Какие из указанных утверждений являются верными?
   (1) В любой трапеции есть два тупых угла.
   (2) В любой трапеции есть острый угол.
   (3) Существует трапеция, в котором два противоположных угла — тупые.

4. Выписали градусные меры трёх углов трапеции. Эти числа относятся как $2:3:6$. Найдите величину четвертого угла этой трапеции.

5. Выпуклый многоугольник имеет диагоналей в 5 раз больше, нежели сторон. Сколько у него вершин?

6. На равных катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отмечены соответственно такие точки E и F, что $AE = CF$, $\angle EFC = 70°$. Построили такой квадрат $EFGH$, что EH пересекает гипотенузу AB. Пусть точка O — середина гипотенузы AB. Найдите величину угла AHO.



7. Какие из указанных утверждений являются признаками параллелограмма?
   (1) Если все углы четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
   (2) В четырёхугольнике, являющемся параллелограммом, могут быть равные диагонали.
   (3) Если четырёхугольнике $ABCD$ равны углы A и C, равны углы B и D, то $ABCD$ — параллелограмм.

8. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD перпендикулярны, диагональ BD равна её средней линии. Найдите величину угла BAC.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2021–2022 учебный год

9. Дан правильный 6-угольник $A_1A_2 \ldots A_6$, в нём равны все углы и все стороны. Внутри него расположены такие точки B и C, что A_1A_2BC — квадрат. Найдите величину угла A_1CA_6.

10. Дан правильный 12-угольник $A_1A_2 \ldots A_{12}$, в нём равны все углы и все стороны. Внутри его расположены такие точки B и C, что A_1A_2BC — квадрат. Найдите величину угла BCA_3.

11. Дан ромб $ABCD$, точка O — его центр, точка E — середина стороны AB. Найдите величину угла D ромба, если $\angle BEO = 40°$.

12. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Отрезок BE пересекает диагональ AC в точке F. Найдите длину DE, если $AD = CF = 120$, $AF = 30$.

13. Какие из указанных утверждений являются верными?
    (1) В любой трапеции сумма оснований больше суммы боковых сторон.
    (2) В любой трапеции разность оснований меньше суммы боковых сторон.
    (3) В любой трапеции полусумма диагоналей больше средней линии.

14. Угол A выпуклого восьмиугольника вдвое меньше каждого из остальных семи углов. Найдите величину угла A.

15. Дана трапеция $ABCD$, $AB = BC = CD$, углы B и C — тупые. Внутри трапеции есть такая точка E, что $AE = ED = BC$, угол AED равен углам B и C трапеции. Найдите величину угла AED.

Блок 4. Многоугольники

Интернет-карусель (2021–2022)

Ответы, решения, комментарии

1. Равные отрезки OA, OB и OC таковы, что $\angle AOB = 110°$, $\angle BOC = 130°$, $\angle COA = 120°$. Точки K, L, M таковы, что четырёхугольники $OAKB$, $OBMC$, $OCLA$ — ромбы. Найдите величину меньшего из углов шестиугольника $AKBMCL$.

   Ответ: 110°.

   Решение. Стороны шестиугольника параллельны отрезкам OA, OB и OC, поэтому его углы равны углам между этими отрезками, то есть 110°, 120° или 130°. Меньший из них равен 110°.

2. Дан ромб $ABCD$, угол A — тупой. На сторонах AB и AD ромба нашлись соответственно точки P и Q такие, что треугольник PCQ — равносторонний, сторона которого равна стороне ромба. Найдите величину угла B данного ромба.

   Ответ: 80°.

   Решение. Из условия следует, что треугольники BCP и CDQ —- равнобедренные. Пусть $\angle B = \angle C = \alpha$. Тогда $\angle BCP = \angle DCQ = 180° - 2\alpha$. Треугольник PCQ — равносторонний, поэтому $\angle PCQ = 60°$. Так как $ABCD$ — ромб, то сумма его углов B и C равна 180°. Получаем $2 \cdot (180° - 2\alpha) + 60° + \alpha = 180°$, откуда $\alpha = 80°$.

3. Какие из указанных утверждений являются верными?
   (1) В любой трапеции есть два тупых угла.
   (2) В любой трапеции есть острый угол.
   (3) Существует трапеция, в котором два противоположных угла — тупые.

   Ответ: 2 и 3.

   Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

   (1) Утверждение не верно. Прямоугольная трапеция имеет два прямых угла, один острый угол и один тупой угол.

   (2) Утверждение верное. Обе боковые стороны не могут быть перпендикулярны основаниям. К боковой стороне, не перпендикулярной основаниями, прилегают два неравных угла, сумма которых равна 180°. Меньший из них — острый.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 8
2021–2022 учебный год

   (3) Утверждение верное. Рассмотрим треугольник ABC с тупым углом A. Средняя линия KL, параллельная стороне AB, отделяет от треугольника трапецию $ABLK$. В этой трапеции противоположные углы A и L — тупые.

4. Выписали градусные меры трёх углов трапеции. Эти числа относятся как 2 : 3 : 6. Найдите величину четвертого угла этой трапеции.

   Ответ: 112,5° или 140°.

   Решение. Пусть градусные меры трёх углов равны $2t$, $3t$ и $6t$. Два из них прилегают к одной боковой стороне, из сумма равна 180°. Сумма двух других также равна 180°. Поэтому, сумма двух из этих трёх углов равна 180° и больше третьего угла. Так как $2t + 3t < 6t$, то возможно два случая.

   (1) Если $2t + 6t = 8t = 180°$, искомый угол равен $180° - 3t = 8t - 3t = 5t$. Здесь $t = 180° : 8 = 22{,}5°$, искомый угол равен $5t = 112{,}5°$.

   (2) Если $3t + 6t = 9t = 180°$, искомый угол равен $180° - 2t = 9t - 2t = 7t$. Здесь $t = 180° : 9 = 20°$, искомый угол равен $7t = 140°$.

5. Выпуклый многоугольник имеет диагоналей в 5 раз больше, нежели сторон. Сколько у него вершин?

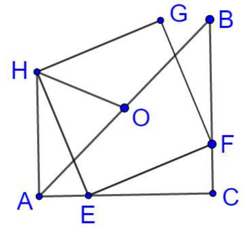
   Ответ: 13.

   Решение 1 (уравнение). Многоугольник с n вершинами имеет n сторон и $n(n-3)/2$ диагоналей. Тогда $n(n-3)/2 : n = (n-3)/2 = 3, n = 13$.

   Решение 2 (устный счёт). Так как из всех вершин выходит поровну сторон и диагоналей, то из каждой вершины выходит в 5 раз больше диагоналей, нежели сторон.

   Из каждой вершины выходит 2 стороны и $2 \cdot 5 = 10$ диагоналей. Значит, кроме этой вершины есть еще $2 + 10 = 12$ вершин. Всего в многоугольнике $12 + 1 = 13$ вершин.

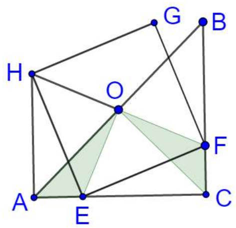
6. На равных катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC отмечены соответственно такие точки E и F, что $AE = CF$, $\angle EFC = 70°$. Построили такой квадрат $EFGH$, что EH пересекает гипотенузу AB. Пусть точка O — середина гипотенузы AB. Найдите величину угла AHO.



   Ответ: 65°.

   Указание. Докажите (1) равенство треугольников CEF и AHE, (2) что точка O — центр квадрата $EFGH$.

   Решение. Треугольники CEF и AHE равны, так как $AE = CF$, $EF = EH$, $\angle EFC = \angle HEA$ (так как эти оба угла вместе с углом FEC дают 90°). Тогда $\angle AHE = 20°$.



Докажем, что точка O — центр квадрата $EFGH$. Треугольники AOE и COF равны ($AE = CF$, в равнобедренном прямоугольном треугольнике $OC = AO$, $\angle OAE = \angle OCF = 45°$).

Угол $\angle AOC = 90°$, $\angle AOE = \angle COF$, поэтому $\angle EOF = 90°$. Также из равенства тех же треугольников $OE = OF$. Значит, точка O — центр квадрата $EFGH$. Тогда $\angle OHE = 45°$.

Из вышесказанного получаем:
$\angle AHO = \angle AHE + \angle EHO = 20° + 45° = 65°$.

7. Какие из указанных утверждений являются признаками параллелограмма?
(1) Если все углы четырёхугольника равны, то этот четырёхугольник — параллелограмм.
(2) В четырёхугольнике, являющемся параллелограммом, могут быть равные диагонали.
(3) Если четырёхугольнике $ABCD$ равны углы A и C, равны углы B и D, то $ABCD$ — параллелограмм.

Ответ: 1 и 3.

Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

(1) Сумма углов четырёхугольника равна 360°. Если все углы четырёхугольника равны, то они — прямые, а этот четырёхугольник — прямоугольник. Прямоугольник является параллелограммом. Значит, утверждение описывает свойства четырёхугольника, из которых можно сделать вывод «это — параллелограмм». Такое утверждение — признак параллелограмма.

(2) Это утверждение не является признаком параллелограмма, так как в нём не делается вывод «это — параллелограмм».

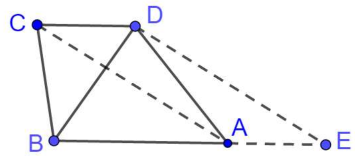
(3) Это признак параллелограмма, входящий в список стандартных признаков.

8. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD перпендикулярны, диагональ BD равна её средней линии. Найдите величину угла BAC.

Ответ: 30°.

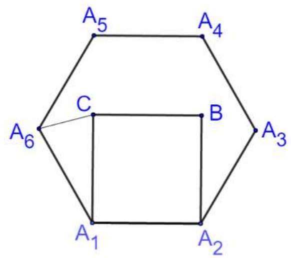
Решение. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований, поэтому из условия следует соотношение $2BD = AB + CD$.

На продолжении основания AB за точку A построим такую точку E, что $AE = CD$; $ACDE$ — параллелограмм, DE и AC параллельны и равны. Диагонали трапеции перпендикулярны, значит, треугольник BDE прямоугольный.



Так как $2BD = AB + CD = AB + AE = BE$, то острые углы прямоугольного треугольника BDE равны 30° и 60°. В частности, $\angle DEB = 30°$. Из параллельности AC и DE следует $\angle CAB = \angle DEB = 30°$.

9. Дан правильный 6-угольник $A_1A_2...A_6$, в нём равны все углы и все стороны. Внутри него расположены такие точки B и C, что A_1A_2BC — квадрат. Найдите величину угла A_1CA_6.

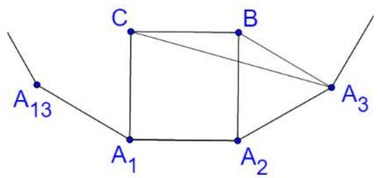


Ответ: 75°.

Решение. Треугольник A_1CA_6 — равнобедренный, так как $A_1A_6 = A_1A_2 = A_1C$. Угол правильного шестиугольника равен 120°. Поэтому
$\angle CA_1A_6 = 120° - 90° = 30°$.
Из суммы углов треугольника A_1CA_6 получаем:
$\angle A_1CA_6 = (180° - 30°) : 2 = 75°$.

10. Дан правильный 12-угольник $A_1A_2...A_{12}$, в нём равны все углы и все стороны. Внутри его расположены такие точки B и C, что A_1A_2BC — квадрат. Найдите величину угла BCA_3.

Ответ: 15°.



Решение. Сумма углов 12-угольника равна $180° \cdot (12 - 2) = 1800°$, каждый угол равен $1800° : 12 = 150°$.

Тогда $\angle BA_2A_3 = 150° - 90° = 60°$. Так как $BA_2 = A_3A_2$, то треугольник BA_2A_3 — равносторонний.

Рассмотрим треугольник A_3BC: он равнобедренный ($BA_3 = A_2A_3 = A_1A_2 = BC$), $\angle CBA_3 = 60° + 90° = 150°$. Тогда $\angle BCA_3 = (180° - 150°) : 2 = 15°$.

11. Дан ромб $ABCD$, точка O — его центр, точка E — середина стороны AB. Найдите величину угла D ромба, если $\angle BEO = 40°$.

Ответ: 140°.

Решение. Из свойств ромба следует, что треугольник AOB — прямоугольный. В нём OE — медиана, проведенная к гипотенузе, из её свойств следует $OE = EB$.

Найдём в равнобедренном треугольнике BEO угол при основании: $\angle EBO = (180° - 40°) : 2 = 70°$. Из свойств ромба BO — биссектриса угла ABC, значит, искомый угол равен $2 \cdot 70° = 140°$.

12. На стороне AD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Отрезок BE пересекает диагональ AC в точке F. Найдите длину DE, если $AD = CF = 120$, $AF = 30$.

Ответ: 90.

Решение. Из свойств параллелограмма $AD = BC$, откуда $CF = BC$, треугольник BCF — равнобедренный. Из этого и параллельности BC и AD следует равенство углов $\angle CBF = \angle BFC = \angle AFE = \angle AEF$, откуда следует равнобедренность треугольника AEF. Значит, $AE = AF = 30$, $DE = AD - AE = 120 - 30 = 90$.

13. Какие из указанных утверждений являются верными?
(1) В любой трапеции сумма оснований больше суммы боковых сторон.
(2) В любой трапеции разность оснований меньше суммы боковых сторон.
(3) В любой трапеции полусумма диагоналей больше средней линии.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

(1) Утверждение не верно. Рассмотрим равнобедренный треугольник со сторонами 2, 10, 10. Средняя линия, параллельная его основанию, отделяет трапецию со сторонами 1, 2, 5, 5. В ней сумма боковых сторон больше суммы оснований: $5 + 5 > 1 + 2$.

(2) Утверждение верно. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AB и CD, $AB < CD$. Отметим такую точку E на основании CD, что $DE = AB$. Тогда $ABED$ — параллелограмм, $AD = BE$, $CE = CD - AB$. Для треугольника BCE выполнено $CE < BE + BC$, откуда следует данное в условии утверждение $CD - AB < AD + BC$.

(3) Утверждение верно. Пусть диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями AB и CD пересекаются в точке O. По неравенству треугольника для ABO и CDO получаем $OA + OB > AB$, $OC + OD > CD$. Тогда $AC + BD > AB + CD$ или $(AC + BD)/2 > (AB + CD)/2$. Получаем данное в условии утверждение, так как в правой части — длина средней линии.

14. Угол A выпуклого восьмиугольника вдвое меньше каждого из остальных семи углов. Найдите величину угла A.

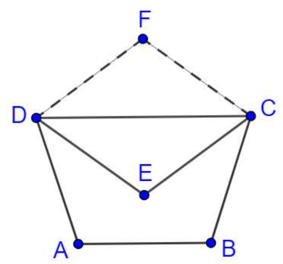
Ответ: 72°.

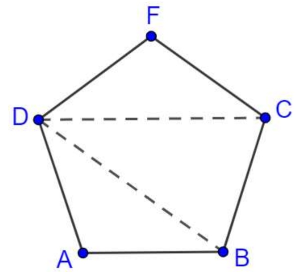
Решение. Сумма углов восьмиугольника равна $6 \cdot 180°$. Если искомый угол равен α, то остальные 7 углов равны 2α. Тогда $\alpha + 7 \cdot 2\alpha = 6 \cdot 180°$, откуда $\alpha = 72°$.

15. Дана трапеция $ABCD$, $AB = BC = CD$, углы B и C — тупые. Внутри трапеции есть такая точка E, что $AE = ED = BC$, угол AED равен углам B и C трапеции. Найдите величину угла AED.

Ответ: 72°.

Решение. Отметим такую точку F, что $CEDF$ — ромб (показано на рисунке слева). Тогда $\angle DFC = \angle DEC$. Докажем, что $ABCFD$ — правильный пятиугольник, в нём равны все углы и равны все стороны.





Из условия для пятиугольника $ABCFD$ (рисунок справа) имеем $AB = BC = CF = FD = DA$, $\angle DAB = \angle ABC = \angle DFC$. Равнобедренные треугольники ABD и FCD равны, в них $\angle ABD = \angle FCD$, $BD = CD$. Тогда треугольник BCD — равнобедренный, в нём $\angle DCB = \angle DBC$. Тогда $\angle ABC = \angle BCF$. Аналогично $\angle BAD = \angle ADF$. Вывод: все углы пятиугольника $ABCFD$ равны.

Сумма углов $ABCFD$ равна суме углов треугольников ABD, BCD и CDF, поэтому равна $3 \cdot 180°$. Каждый угол пятиугольника равен $3 \cdot 180° : 5 = 108°$.

Тогда в ромбе $CEDF$ (рисунок слева) $\angle DCB = 180° - 108° = 72°$. Получаем, что в равнобедренном треугольнике ADE (в нём $AD = DE$) $\angle ADE = 108° - 72° = 36°$. В нём получаем $\angle AED = (180° - 36°) : 2 = 72°$.