Блок 3. Прогрессии

Интернет-карусель 2021–2022

Задания

1. Восьмой член арифметической прогрессии в 2 раза больше третьего. Во сколько раз седьмой член этой прогрессии больше первого?

2. Геометрическая прогрессия состоит из 5 чисел. Первое равно 256, последнее равно 81. Чему равно третье число?

3. Какие из геометрических прогрессий существуют?
(1) В которой второй член равен 2, а десятый равен 3.
(2) В которой третий член меньше первого и меньше четвертого.
(3) В которой один член отрицательный, а остальные пять членов — положительные.

4. Первый член арифметической прогрессии равен 7, последний равен 245, еще один из членов равен 75. Какие наименьшее количество чисел может быть в этой прогрессии?

5. Какие утверждения верны?
(1) Все прямоугольные треугольники, у которых стороны которых арифметическую прогрессию, подобны.
(2) Все прямоугольные треугольники, у которых стороны образуют геометрическую прогрессию, подобны.
(3) Все прямоугольные треугольники, у которых меры углов образуют арифметическую прогрессию, подобны.

6. Арифметическая прогрессия состоит из 123 чисел, начинается с числа 7, имеет разность 5. Каково последнее число?

7. Геометрическая прогрессия состоит из 4 чисел. Первые два члена отличаются на 12, второй и третий — на 60, третий с четвертым — на 300. Найдите третий член прогрессии.

8. При каком наименьшем n верно утверждение про бесконечную арифметическую прогрессию из натуральных чисел: «Если сложить любые n подряд идущих членов, то сумма всегда будет кратна 6»?

9. Экспериментаторы поселили по одной бактерии в каждую из двух пробирок. В первой пробирке каждую минуту каждая бактерия делиться на две новые бактерии. Во второй пробирке бактерии не размножаются, но каждую минуту в пробирку добавляют еще 2022 новых бактерии. Так на второй минуте в первой пробирке будет 2 бактерии, а во второй — 2023 бактерии. На какой минуте впервые количество бактерий в первой пробирке станет больше, чем во второй?

10. Какие утверждения верны?
(1) Существует треугольник, отличный от равностороннего, углы которого образуют арифметическую прогрессию, а стороны — геометрическую.
(2) Если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то его высоты тоже образуют арифметическую прогрессию.
(3) Если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.

11. Углы A, B, C треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько градусов составляет угол B?

12. Сколько существует бесконечных арифметических прогрессий, содержащих числа 5 и 62, и состоящих из натуральных чисел?

13. Сколько членов содержит самая длинная геометрическая прогрессия, члены которой различны, состоящая только из трехзначных чисел?

14. Каково наибольшее возможное количество членов арифметической прогрессии, в которой чередуются рациональные и иррациональные числа?

15. В ряд написали $2N$ цифр. Их разбили на пары в порядке следования и получили арифметическую прогрессию из N двузначных чисел. Затем этот ряд цифр написали в обратном порядке. Цифры разбили на пары в порядке следования и снова получили арифметическую прогрессию из N двузначных чисел. При каком наибольшем N такое возможно?

Блок 3. Прогрессии

Интернет-карусель 2021–2022

Ответы, решения, комментарии

В решениях заданий, если не оговорено иное, арифметические прогрессии обозначаются как (a_n), d — разность, геометрические прогрессии — как (b_n), q — знаменатель.

1. Восьмой член арифметической прогрессии в 2 раза больше третьего. Во сколько раз седьмой член этой прогрессии больше первого?

   Ответ: 3.

   Решение. Пусть a_1 — первый член прогрессии, d — разность прогрессии. Из условия $a_8 = 2a_3$, откуда $a_1 + 7d = 2(a_1 + 2d)$, откуда $a_1 = 3d$. Значит, последовательность имеет вид $3d$, $4d$, $5d$, ... Тогда $a_7 = 9d$, $a_1 = 3d$, они отличаются в 3 раза.

2. Геометрическая прогрессия состоит из 5 чисел. Первое равно 256, последнее равно 81. Чему равно третье число?

   Ответ: 144.

   Решение. Пусть данная прогрессия (b_n), q — её знаменатель. Выполнено соотношение $b_3^2 = b_1 b_5$, так как $(b_1 q^2)^2 = b_1 \cdot b_1 q^4$.

   Тогда $a_3 = \sqrt{256 \cdot 81} = \sqrt{16^2 \cdot 9^2} = 16 \cdot 9 = 144$.

   Комментарий. Сама прогрессия такова: (256; 192; 144; 108; 81).

3. Какие из геометрических прогрессий существуют?
   (1) В которой второй член равен 2, а десятый равен 3.
   (2) В которой третий член меньше первого и меньше четвертого.
   (3) В которой один член отрицательный, а остальные пять членов — положительные.

   Ответ: 1 и 2.

   Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

   (1) Пусть данная прогрессия (b_n), q — её знаменатель. Из условия $b_1 q = 2, b_1 q^9 = 3$, откуда $b_1 q^9 : b_1 q = q^8 = 1{,}5$, $q = \sqrt[8]{1{,}5}$, $b_1 = 2/\sqrt[8]{1{,}5}$. То есть, такая прогрессия существует.

   (2) Подходит, например, прогрессия (–2, 4, –8, 16) со знаменателем –2.

   (3) Если знаменатель прогрессии положительный, то все её члены одного знака. Если знаменатель прогрессии отрицательный, то в неё чередуются члены разных знаков. Значит, указанное в условии невозможно.

4. Первый член арифметической прогрессии равен 7, последний равен 245, еще один из членов равен 75. Какие наименьшее количество чисел может быть в этой прогрессии?

   Ответ: 8.

   Решение. Разность 75 – 7 = 68 кратна разности прогрессии, поэтому в прогрессии есть члены 245 – 68 = 177, 177 – 68 = 109, 109 – 68 = 41. Значит, в прогрессии есть члены 7, 41, 75, 109, 177, 245.

   Разность 75 – 41 = 34 кратна разности прогрессии, поэтому в прогрессии есть члены 177 – 34 = 143, 245 – 34 = 211. Значит, в прогрессии есть члены 7, 41, 75, 109, 143, 177, 211, 245. Эти 8 чисел образуют арифметическую прогрессию, значит, искомое количество — 8.

5. Какие утверждения верны?
   (1) Все прямоугольные треугольники, у которых стороны которых арифметическую прогрессию, подобны.
   (2) Все прямоугольные треугольники, у которых стороны образуют геометрическую прогрессию, подобны.
   (3) Все прямоугольные треугольники, у которых меры углов образуют арифметическую прогрессию, подобны.

   Ответ: 1, 2, 3.

   Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

   (1) Пусть a, $a + d$, $a + 2d$ — стороны треугольника. Из теоремы Пифагора следует $a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2$, откуда $a = 3d$. Значит, все такие треугольники имеют стороны $3d$, $4d$, $5d$, они подобны.

   (2) Пусть b, bq и bq^2 — стороны треугольника. Из теоремы Пифагора следует $b^2 + (bq)^2 = (bq^2)^2$, откуда $1 + q^2 = q^4$.

   Если $(q^2)^2 - (q^2) - 1 = 0$, то $q^2 = \left(1 \pm \sqrt{5}\right)/2$. Так как $1 - \sqrt{5} < 0$, то получаем $q^2 = \left(1 + \sqrt{5}\right)/2$ — возможное положительное значение q единственное. Значит, все треугольники, удовлетворяющие условию, подобны треугольнику со сторонами 1, q и q^2.

   (3) Если меры углов образуют арифметическую прогрессию, то средний угол вдвое меньше суммы двух других, то есть равен 180° : 3 = 60°. Значит, условию удовлетворяют только треугольники с углами 90°, 60°, 30°, они подобны.

6. Арифметическая прогрессия состоит из 123 чисел, начинается с числа 7, имеет разность 5. Каково последнее число?

   Ответ: 617.

   Решение. Из условия $a_1 = 7, d = 5, a_1 23 = a_1 + 122d = 7 + 5 \cdot 122 = 617$.

7. Геометрическая прогрессия состоит из 4 чисел. Первые два члена отличаются на 12, второй и третий — на 60, третий с четвертым — на 300. Найдите третий член прогрессии.

   Ответ: −75, −50, 50 или 75.

   Решение. Из условия:
   $b_1 - b_2 = b_1 - b_1 q = b_1(1-q) = \pm 12$,
   $b_2 - b_3 = b_1 q - b_1 q^2 = b_1 q(1-q) = \pm 60$,
   откуда $q = (b_2 - b_3)/(b_1 - b_2) = \pm 60/\pm 12 = \pm 5$.
   Тогда $b_1 = (b_1 - b_2)/(1-q) = \pm 12/(1 \pm 5)$, то есть b_1 равно ±2 (при $q = -5$) или ±3 (при $q = 5$).

   Получаем следующие возможные варианты:
   $b_1 = 2, q = -5$ имеем прогрессию −2, 10, −50, 250,
   $b_1 = -2, q = -5$ имеем прогрессию 2, −10, 50, −250,
   $b_1 = 3, q = 5$ имеем прогрессию 3, −15, 75, −375,
   $b_1 = -3, q = 5$ имеем прогрессию −3, 15, −75, 375.

   Не трудно проверить, что все они подходят.

   Значит, b_3 равно ±50 или ±75.

8. При каком наименьшем n верно утверждение про бесконечную арифметическую прогрессию из натуральных чисел: «Если сложить любые n подряд идущих членов, то сумма всегда будет кратна 6»?

   Ответ: 12.

   Решение. Рассмотрим две прогрессии: 1, 7, 13, 19, … — числа, дающие при делении на 6 остаток 1, и 2, 8, 14, 20, … — числа, дающие при делении на 6 остаток 2.

   Сумма первых n членов этих прогрессии равна
   $S_n = n\big(2a_1 + d(n-1)\big)/2 = n\big(2a_1 + 6(n-1)\big)/2 = n(a_1 + 3n - 3)$.

   Для первой прогрессии сумма вычисляется по формуле $n(3n-2)$, для второй — по формуле $n(3n-1)$. При одном значении n оба значения должны быть кратны 6, значит, n кратно 6.

   Для прогрессии 1, 2, 3, … сумма любых 6 подряд идущих членов нечётна, то есть не кратна 6. Значит, следующее подходящее $n = 12$.

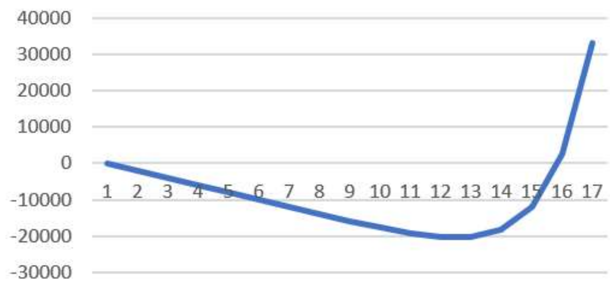
   При $n = 12$ имеем $S_n = 12(2a_1 + 11d)/2 = 6(2a_1 + 11d)$ — всегда кратно 6.

9. Экспериментаторы поселили по одной бактерии в каждую из двух пробирок. В первой пробирке каждую минуту каждая бактерия делиться на две новые бактерии. Во второй пробирке бактерии не размножаются, но каждую минуту в пробирку добавляют еще 2022 новых бактерии. Так на второй минуте в первой пробирке будет 2 бактерии, а во второй — 2023 бактерии. На какой минуте впервые количество бактерий в первой пробирке станет больше, чем во второй?

   Ответ: 16.

   Указание. Через n минут разность числа бактерий в пробирках равна $f(n) = 2^{n-1} - \big(1 + 2022(n-1)\big)$. Не трудно показать, что при $2 \le n \le 15$ значения отрицательные, а при $n = 16$ — положительное. Далее при увеличении n на 1 в одной пробирке число бактерий увеличивается как минимум на $2^{15} > 2022$, во второй — на 2022. То есть, значение $f(n)$ останется положительным.

   Комментарий. На графике зависимость выглядит как показано на рисунке.



10. Какие утверждения верны?
    (1) Существует треугольник, отличный от равностороннего, углы которого образуют арифметическую прогрессию, а стороны — геометрическую.
    (2) Если стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию, то его высоты тоже образуют арифметическую прогрессию.
    (3) Если стороны треугольника образуют геометрическую прогрессию, то его высоты тоже образуют геометрическую прогрессию.

    Ответ: 1 и 3.

    Решение. Рассмотрим каждое утверждение.

    (1) Утверждение верное. Из решения задачи № 11 следует, что средний угол треугольника равен 60°. Если стороны образуют геометрическую прогрессию, то напротив этого угла лежит сторона длины bq, длины двух других сторон — b и bq^2. По теореме косинусов получаем $(bq)^2 = b^2 + (bq^2)^2 - 2 \cdot b \cdot bq^2$, откуда $q^2 = 1 + q^4 - 2q^2$ или $q^4 - 3q^2 + 1 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно q^2

получаем, что $q^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right)/2$, откуда $q^2 = \left(3 + \sqrt{5}\right)/2$. То есть такое значение q существует, откуда следует существование треугольника с данными свойствами.

(2) Утверждение не верно. Приведем противоречащий пример. Прямоугольный треугольник со сторонами 3, 4, 5 имеет площадь $S = 3 \cdot 4 : 2 = 6$. Его высота, проведенная к гипотенузе, имеет длину $2S : 5 = 2{,}4$. Две другие высоты совпадают с катетами длины 3 и 4. Значит, в данном треугольнике стороны образуют арифметическую прогрессию (3; 4; 5), то его высоты (2,4; 3; 4) не образуют арифметическую прогрессию.

(3) Утверждение верное. Три числа образуют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда квадрат одного из них равен произведению двух других. Пусть a, b, c — стороны треугольника площади S и $b^2 = ac$. Высоты треугольника равны $2S/a, 2S/b, 2S/c$.

Получаем: $(2S/b)^2 - (2S/a)(2S/c) = 4S^2(ac - b^2)/(ab^2c) = 0$.

Значит, высоты также образуют геометрическую прогрессию.

11. Углы A, B, C треугольника ABC образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Сколько градусов составляет угол B?

    Ответ: 60.

    Решение. Пусть величины углов A, B, C соответственно равны $a_2 - d$, $a_2, a_2 + d$. Тогда $a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 180°, 3a_2 = 180°, a_2 = 60°$.

12. Сколько существует бесконечных арифметических прогрессий, содержащих числа 5 и 62, и состоящих из натуральных чисел?

    Ответ: 9.

    Решение. Разность 62 – 5 = 57 кратна d. Значит, d равно 1, 3, 19 или 57. Если d равно 19 или 57, то первый элемент равен 5. Если $d = 3$, то первый элемент 5 или 2, если $d = 1$, то первый элемент — число от 1 до 5. Итого 9 прогрессий.

13. Сколько членов содержит самая длинная геометрическая прогрессия, члены которой различны, состоящая только из трехзначных чисел?

    Ответ: 6.

    Решение. Прогрессия (128, 192, 288, 432, 648, 972) является геометрической со знаменателем 3/2.

    Предположим, что есть прогрессия из 7 членов. Знаменатель прогрессии — рациональное число, так как является отношением двух натуральных чисел. Пусть он равен p/q, числа p и q — натуральные и взаимно простые. Пусть прогрессия убывает, тогда $q > p, q \geq 3$.

Седьмой член равен $b_1 p^6/q^6$. Так как p и q взаимно просты, то b_1 кратно q^6.

Если $q \geq 4$, то b_1 не менее 4^6, что более 1000.

Если $q = 3$, то $p = 2$. Тогда b_1 кратно $3^6 = 729$. Значит, оно равно 729. В этом случае $b_1 = 2^6 = 64$, что не является трёхзначным.

14. Каково наибольшее возможное количество членов арифметической прогрессии, в которой чередуются рациональные и иррациональные числа?

    Ответ: 3.

    Решение. Если в прогрессии два рациональных числа, то её разность рациональна (так как разность кратная разности). Тогда все члены будут либо рациональны, либо иррациональны.

    Если в прогрессии одно рациональное число, то иррациональных не более двух. Всего не более 3 членов. Такое возможно. Прогрессия $\left(\sqrt{2};\ 1;\ 2 - \sqrt{2}\right)$ удовлетворяет условию.

15. В ряд написали $2N$ цифр. Их разбили на пары в порядке следования и получили арифметическую прогрессию из N двузначных чисел. Затем этот ряд цифр написали в обратном порядке. Цифры разбили на пары в порядке следования и снова получили арифметическую прогрессию из N двузначных чисел. При каком наибольшем N такое возможно?

    Ответ: 9.

    Решение. Такое возможно при $N = 9$. Ряд 111213141516171819 можно представить как прогрессии (11, 12, …, 19) и (91, 81, …, 11).

    Заметим, что в ряду только цифры от 1 до 9, иначе какое-то двузначное будет начинаться с нуля, что невозможно.

    Предположим, что есть пример при $N \geq 10$. Пусть числа первой получившейся прогрессии возрастают. Первые цифры членов нестрого возрастают: каждая следующая всегда не меньше предыдущей. Значит, какие-то две первые цифры соседних членов совпадают.

    Первые цифры этой прогрессии становятся вторыми цифрами членов другой прогрессии. Тогда какие-то два соседних члена оканчиваются на одну цифру. Тогда разность кратна 10 и все остальные цифры оканчиваются на ту же цифру. Значит, в первой прогрессии все числа из одного десятка. Их не может быть 10 штук, иначе используется цифра 0.