Блок 4. Логика

Интернет-карусель (2022–2023)

Указания, ответы и решения

1. Каждый из четырех друзей Рыбкин, Собакин, Котов и Хомячков завели себе по одному питомцу — рыбку, собаку, кота и хомячка. Оказалось, что никакой питомец не соответствует фамилии хозяина. Тот, кто завел себе Рыбку, ростом ниже Собакина. Однажды Хомячков, самый высокий из всех, был в гостях у своего друга, и хозяйская собака погрызла его ботинки. Определите питомцев Рыбкина, Собакина, Котова и Хомячкова.

   Ответ: у Рыбкина — собака, у Собакина — хомячок, у Котова — рыбка, у Хомячкова — кот.

   Решение. Составим таблицу, где каждой строке соответствует один из друзей, а столбцы — животным. В таблице № 1 отмечено условие «никакой питомец не соответствует фамилии хозяина».

   Из условия задачи следует, что Собакин завёл не рыбку, Хомяков также не завёл рыбку (из сравнения роста героев). Также ясно, что Хомяков завёл не собаку. Эти выводы отмечены в таблице № 2.

   Тогда понятно, что Котов завёл рыбку, а Хомячков — кота. Отметив этот результат, получаем таблицу № 3. Здесь уже видно, что собаку завёл Рыбкин, а хомячка — Собакин. Итог показан в таблице № 4.

	Р	С	К	Х
Рыбкин	X			
Собакин		X		
Котов			X	
Хомячков				X

Таблица № 1

	Р	С	К	Х
Рыбкин	X			
Собакин	X	X		
Котов			X	
Хомячков	X	X		X

Таблица № 2

	Р	С	К	Х
Рыбкин	X		X	
Собакин	X	X	X	
Котов	+	X	X	X
Хомячков	X	X	+	X

Таблица № 3

	Р	С	К	Х
Рыбкин	X	+	X	X
Собакин	X	X	X	+
Котов	+	X	X	X
Хомячков	X	X	+	X

Таблица № 4

2. Бизнесмен Вася каждое утро произносит фразу «Завтра я заработаю денег больше, чем вчера» и каждый раз оказывается прав. Его друг Олег всё время лжёт.

Международные соревнования «Интернет-карусели»
Карусель-кружок. Математика 5–6
2022–2023 учебный год

   Какую из указанных ниже фраз Олег мог произнести Васе?
   (1) Послезавтра ты заработаешь денег больше, чем сегодня.
   (2) Сегодня ты заработаешь денег больше, чем позавчера.
   (3) Послезавтра ты заработаешь денег больше, чем позавчера.
   (4) Завтра ты заработаешь больше, чем позавчера.
   (5) 28 февраля ты заработаешь больше, чем 1 января этого же года.

   Ответ: 4.

   Решение. Пусть все дни, идущие через один, синие, а остальные, также идущие через один, — красные. Из утверждений Васи следует, что его ежедневный заработок в дни одного цвета каждый раз всё больше и больше.

   Послезавтра и сегодня, сегодня и позавчера, послезавтра и позавчера, 1 января и 28 февраля одного года — одноцветные дни. Поэтому, утверждения (1), (2), (3) и (5) всегда верные. Олег не мог их произнести.

   Завтра и позавчера — дни разного цвета. Может оказаться так, что Василий в дни одного цвета всегда зарабатывает меньше, чем в дни другого цвета. Поэтому, утверждение (4) может быть неверным, Олег его мог сказать.

   Комментарий. Если не считать, что 28 февраля и 1 марта не обязательно относятся к одному календарному году, то утверждение № 5 также может оказаться верным. Определите самостоятельно, каком случае такое может произойти.

3. Сколько двузначных (натуральных) чисел, про каждое из которых неверно утверждение: «Сумма цифр числа равна 14»?

   Ответ: 85.

   Указание. Сумма цифр равна 14 у чисел 59, 68, 77, 86, 95 — всего 5 штук. Всего 90 двузначных чисел. Для остальных 90 – 5 = 85 чисел утверждение не верно.

4. Сколько двузначных (натуральных) чисел, про каждое из которых неверно утверждение: «Сумма цифр числа меньше 14»?

   Ответ: 15.

   Указание. Сумма цифр больше или равна 14, то есть 14, 15, 16, 17 или 18. Это числа 59, 68, 77, 86, 95, 69, 78, 87, 96, 79, 88, 97, 89, 98 и 99. Всего 15 штук.

5. Сколько двузначных (натуральных) чисел, про каждое из которых неверно утверждение: «Цифры числа разной чётности и сумма цифр больше 13»?

   Ответ: 84.

   Указание. Всего 90 двузначных чисел. Утверждение верно про числа с суммой нечётной суммой цифр, большей 13, то есть с суммой цифр 15 или 17. Это числа 69, 78, 87, 96 и 89, 98 — всего 6 штук. Для остальных 90 – 6 = 84 чисел утверждение не верно.

6. Алиса зашла в гости к Безумному Шляпнику. Она увидела, как он и еще пятеро сидят за круглым столом и пьют чай. Алиса знает, что хоть Шляпник и говорит всегда правду, но среди его гостей могут быть те, что всегда лгут. «Зато остальные всегда честны!» — оправдывается Шляпник.

Алиса решила узнать, сколько же за столом лгунов, и спросила каждого, сколько рядом с ним сидит лжецов. Ей все ответили одинаково. Подумав, она поняла — из этих ответов ей не узнать количество лжецов.

Вдруг один из гостей, посмотрев на часы, сказал: «Надо же, уже 8 часов!». «Это точно» — подтвердил его сосед. И вот тогда Алиса смогла узнать, сколько лжецов за столом. И сколько же их?

Ответ: 4.

Решение. Рассмотрим, какие ответы Алисе могли давать за столом.

(1) Если бы все присутствующие ответили, что оба их соседа не лгут, то за столом были бы все честны, как Шляпник. Тогда Алиса сразу бы нашла ответ на свой вопрос.

(2) Если бы все ответили, что соседи среди соседей ровно один лжец, то за столом однозначно два лжеца.

(3) Пусть каждый ответил, что оба его соседа лжецы. Значит, рядом со Шляпником сидят лжецы. Из остальных троих есть хотя бы один не лжец. Шляпник может видеть своих гостей так: ЛРЛРЛ или ЛЛРЛЛ. Про время два соседа утверждают одно и то же, значит, первый вариант не подходит. Остаётся второй, в нём 4 лжеца.

7. Лёня, Тима, Макар и Андрей пришли в керамическую мастерскую. Двое делали лепили из глины, а двое — из пластилина. Тима и Андрей лепили из разного материала. Лёня уже не любит пластилин, Андрей лепил из пластилина. Каждый сделал по одной фигурке: получилось три медведя и один волк. Тима делал волка. Сколько у ребят получилось пластилиновых медведей?

Ответ: 2.

Решение. Можно определить, кто какой материал использовал: Лёня — из глины, Андрей — из пластилина, Тима — из глины, откуда следует, что Макар — из пластилина. Если Тима делал волка, то из пластилина сделали двух медведей.

Комментарий. Без условия, что Макар делал волка, пластилиновых медведей может быть 1 или 2.

8. За круглым столом сидят 8 рыцарей, несколько лжецов и 10 обычных людей, которые могут и врать, и говорить правду. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждый из них сказал две фразы: «Справа от меня сидит лжец» и «Слева от меня сидит обычный человек». Сколько всего лжецов за столом?

Ответ: 8.

Решение. Два лжеца не могут стоять рядом, иначе один из них сказал правду. Около каждого рыцаря стоит лжец. Лжец не может быть окружен двумя обычными людьми, иначе он скажет правду. Значит, у лжеца есть сосед рыцарь.

Назовём группой рыцаря вместе с его соседями (лжецом и обычным человеком). Эти 8 групп не пересекаются. Между группами не может быть лжецов, так как любой, сидящий между группами, не имеет соседа-рыцаря.

Вывод: лжецы только в группах, их 8 человек.

9. Выступая на спектакле «Весёлые цифры», Аня, Боря, Вася, Гена и Диана должны взять таблички с цифрами «1», «2», «3», «4» и «5» и встать с ними в ряд, чтобы цифры шли по порядку. При этом Аня и Диана не хотят стоять рядом, а Боря и Вася не хотят брать цифры одной чётности. Сколько вариантов, как можно раздать таблички детям?

Ответ: 40.

Решение 1 «Перебор». Если мы определим места, занимаемые девочками, и места, занимаемые парой Боря-Вася, то в каждом случае девочек можно расположить 2 способами, Борю и Васю двумя способами, а место Гены определится однозначно. Каждому такому случаю соответствует 2 · 2 = 4 варианта.

В таблице справа каждая строка — вариант для девочек, справа для каждой строки указано количество способов выбрать 2 места разной чётности для пары Боря-Вася. Видно, что есть всего 10 вариантов. Учитывая вышесказанное, всего 4 · 10 = 40 вариантов.

1	2	3	4	5	
Д		Д			2
Д			Д		2
Д				Д	2
	Д		Д		0
	Д			Д	2
		Д		Д	2

Решение 2 «Уберем плохие варианты». Если не ставить ограничения, то таблички можно раздать детям 5! = 5 · 4 · 3 · 2 · 1 = 120 способами. Найдём количество неподходящих вариантов.

Сколько вариантов, когда Аня и Диана стоят рядом? Девочек можно поставить рядом 8 способами. В каждом из этих вариантов остальных можно поставить 3 · 2 · 1 = 6 способами. Итого 8 · 6 = 48 штук.

Сколько вариантов, когда Боря и Вася взяли числа одной чётности? Если взяли «2» и «4», то они их берут 2 способами, а остальные берут любые из остальных

— это $2 \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 12$ вариантов. Если это два из чисел «1», «3», «5» (3 способа), то они их берут 2 способами, а остальные берут любые из трёх оставшихся. Это $(3 \cdot 2) \cdot (3 \cdot 2 \cdot 1) = 36$ вариантов. Всего $12 + 36 = 48$.

Когда работают оба ограничения: Аня и Диана стоят рядом, Боря и Вася взяли числа одной чётности?

Если Боря и Вася получили обе чётные цифры, то Аня и Диана — нечётные. При этом девочки не могут стоять рядом. Такие варианты невозможны.

Пусть Боря и Вася получили две нечётные цифры из трёх. Если осталось нечётное число 1 или число 5, то цифры девочек определены однозначно (1 и 2 или 4 и 5) — таких вариантов $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Если осталось нечётное число 3 — есть 2 способа выбрать пару — таких вариантов также $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Итого $8 + 8 = 16$ штук.

Вывод: неподходящих вариантов — $48 + 48 - 16 = 96 - 16 = 80$, подходящих — $120 - 80 = 40$.

10. Шестеро друзей-шестиклассников закончили вторую четверть без двоек. Обсуждая свои итоговые оценки по математике, Света и Аня поспорили: Света считает сумму оценок, равной 26, а Аня — равной 24. А Катя, Миша, Петя и Олег назвали соответственно суммы 23, 22, 20 и 19. Известно, наврали те и только те, кто по математике получил «4». Чему же равна сумма оценок детей?

Ответ: 23.

Решение. Были даны разные ответы, значит, либо все шестеро соврали, либо правду сказал только один.

Если все соврали, то все получили оценки «4» по математике, сумма равна 24. Тогда Аня сказала правду, что противоречит условию.

Если правду сказал только один, то пятеро получили «4», а один — «3» или «5». Сумма равна либо 23, либо 25. Но числа 25 среди ответов нет, значит, сумма однозначно равна 23.

11. Среди пяти утверждений отметьте верные.

(1) Сумма номеров верных утверждений равна 6.
(2) Среди этих утверждений не больше двух верных.
(3) Среди первых трех утверждений есть верные.
(4) Верны только (2) и (4).
(5) Никакие два неверных утверждения не стоят рядом.

Ответ: 2 и 3.

Решение. Если все утверждения ложные, то утверждение (2) станет верным — противоречие. Значит, верные утверждения имеются.

Утверждение (4) не может быть верным. Иначе верны только (2) и (4), но при этом становится верным (1) — противоречие.

Утверждение (3) верное, иначе верное — только утверждение (5). Но оно неверное, так как в этом случае неверные (1) и (2) стоят рядом.

Если утверждение (2) неверное, то верных утверждений всё равно не более двух — это (3) и еще, возможно, (5). Противоречие. Значит, (2) — верное, а (5) — нет (иначе оно будет третьим верным).

Вывод: верные — утверждения (2) и (3).

12. Выступая на спектакле «Весёлые цифры», Аня, Боря, Вася, Гена и Диана должны взять таблички с цифрами «1», «2», «3», «4» и «5» и встать с ними в ряд, чтобы цифры шли по порядку. Каждая из девочек не хочет иметь цифру той же чётности, что есть у мальчика. Рядом не хотят стоять Аня и Боря, Диана и Гена. Боря не хочет цифру «1», так как она самая маленькая. С какими цифрами стоят Аня, Боря, Вася, Гена и Диана?

Ответ: Аня — «2», Боря — «5», Вася — «3», Гена — «1», Диана — «4».

Решение. Из условия следует, что у девочек цифры одной чётности, а у мальчиков — другой. Так как чётных цифр две, а девочек двое, то у девочек цифры «2» и «4», у мальчиков — «1», «3» и «5». Так как Боря и Гена не могут стоять между девочками, поэтому у них «1» и «5», а у Васи — «3». Боря не хочет цифру «1», поэтому у него «5», в Гены — «1». Так как Диана не стоит рядом с Геной, то у неё «4», а у Ани — «2».

Комментарий. Проследить за решением легче, если заполнять таблицу соответствия между ребятами и номерами.

13. Найдите наименьшее натуральное число N, про которое верно следующее:
– если в записи числа N есть 1, то оно нечетное;
– если число N не делится на 3, то в его записи есть 0;
– если число N нечетное, то оно двузначное;
– если число N меньше 8, то оно делится на 4.

Ответ: 15.

Решение. Числа 1, 2, 3, 5, 6, 7 не подходит из-за утверждения 4.
Числа 4 и 8, 11 и 13 не подходят из-за утверждения 2.
Число 9 не подходит из-за утверждения 3.
Числа 10, 12, 14 не подходят из-за утверждения 1.
Число 15 подходит.

14. На доске написаны 10 цифр, среди которых нет равных. Он образуют 4 натуральных числа. Самое большое из этих чисел составлено из самых маленьких цифр, а самое маленькое число делится на 17. Найдите сумму двух средних чисел.

Ответ: 169.

Решение. (1) Поймем количество цифр в каждом из чисел.

Самое большое число составлено из самых маленьких цифр, значит, в нём больше разрядов, чем в любом другом числе. Если в нем не более 3 цифр, то в других не более 2 цифр, всего — не более 3 + 2 + 2 + 2 = 9 цифр, что невозможно по условию. Значит, самое большое число состоит не менее чем из 4 цифр.

Самое маленькое число кратно 17, поэтому оно состоит по крайней мере из 2 цифр. Если среди двух средних чисел есть число, в котором не менее 3 цифр, то всего использовано не менее 4 + 3 + 2 + 2 = 11 цифр, что невозможно по условию. Вывод: большее число — 4-значное, остальные — 2-значные.

(2) Определим два средних числа.

В записи трёх двузначных чисел использованы цифры 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Меньшее число, кратное 17, не менее чем $17 \cdot 4 = 68$ (17, 34 и 51 не подходят). Если оно не менее $17 \cdot 5 = 85$, то одно из остальных двузначных чисел меньше, так как начинается с меньшей цифры. Вывод: меньшее число — 68. Тогда оставшиеся 2 числа начинаются с 7 и 9, их вторые цифры — 4 и 5. Их сумма — $(7 + 9) \cdot 10 + (4 + 5) = 169$.

15. Про натуральное число известно четыре факта.
(1) Это двузначное число или оно делится на 5, но не то и другое одновременно.
(2) Это число делится на 13 или оканчивается на 13, но не то и другое одновременно.
(3) Это трехзначное число или сумма его цифр больше 14, но не то или другое одновременно.
(4) Это простое число или оно меньше 80, но не то или другое одновременно.
Найдите все такие числа.

Ответ: 78.

Решение. Пусть это двузначное число, тогда по утверждению (1) оно не делится на 5. Оно не трехзначное, значит, по утверждению (3) сумма его цифр больше 14. Тогда оно не 13, значит, не оканчивается на 13, а по утверждению (2) делится на 13. Так как сумма цифр больше 14, то первая цифра числа не меньше 5. Значит, это 65, 78 или 91. Подходит только 78 — оно не простое, меньше 80 и сумма цифр больше 14.

Пусть речь идёт не о двузначном числе, то оно делится на 5. Тогда оно не оканчивается на 13, значит, по утверждению (2) делится на 13. Получаем, что число кратно 5 и 13, то есть кратно 65. Оно не однозначное и не двузначное число, поэтому больше 80. По утверждению (4) оно должно быть простым, но это не так (так как оно кратно составному числу 65).