Блок 11. Поверхности и объемы

Подготовительное занятие

- Куб со стороной 1 м распилили на кубики со стороной 1 см и положили их в ряд (по прямой). Какой длины оказался ряд?
- Сколько кубиков надо добавить к фигуре, изображенной на рисунке 1, чтобы получилась фигура, изображенная на рисунке 2?

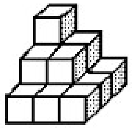


Рис. 1

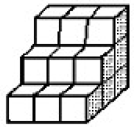


Рис. 2

- Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там все вещи ровно в 12 раз короче, чем на его родине. Сможете ли вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечный коробок Гулливера?

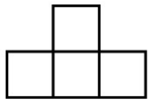
1. (а) Нарисуйте куб $3 \times 3 \times 3$. Из скольких кубиков он состоит? Из скольких квадратиков состоит его поверхность?

   (б) Нарисуйте куб $3 \times 3 \times 3$ без одного углового кубика.

   (в) Нарисуйте куб $3 \times 3 \times 3$ без всех угловых кубиков. Из скольких кубиков состоит такая фигура? Из скольких квадратиков состоит её поверхность?

2. Брусок $10 \times 8 \times 6$ разрезали на кубики $1 \times 1 \times 1$. Какова суммарная площадь разрезов?

3. Для награждения биатлонистов мастер собрал пьедестал из четырёх кубиков со стороной 40 см и покрасил его белой краской. А потом поступил заказ на пьедестал из кубиков со стороной 60 см для награждения тяжелоатлетов. Сколько грамм краски понадобится мастеру для покраски нового пьедестала, если на покраску пьедестала для биатлонистов ушло 400 грамм?



4. У Вани есть 12 одинаковых кубиков. Он складывает из них параллелепипеды и считает у каждого площадь поверхности. Какое наибольшее значение могло получиться у Вани, если площадь поверхности одного кубика равна 24?

5. Мама купила кускового сахара. Дети сначала съели верхний слой — 77 кусков, затем боковой слой — 55 кусков, наконец, передний слой. Сколько кусочков сахара осталось в коробке?

6. Имеется три деревянных куба. Длина ребра одного куба равна 1 м, другого — 2 м, третьего — 3 м. На покраску малого куба надо на 672 г краски меньше, нежели на окраску среднего куба. Сколько граммов краски надо на окраску большого куба?

7. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на 5 равных частей, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у

которых ребро в 5 раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков, у которых окрашена хотя бы одна грань?

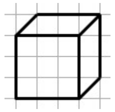
8. Деревянный куб $N \times N \times N$ составили из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Затем его снаружи покрасили белой краской. Оказалось, что кубиков, у которых окрашена ровно одна грань, столько же, сколько кубиков, у которых не окрашена ни одна из граней. Найдите N.

9. И куба $4 \times 4 \times 4$, составленного из кубиков $1 \times 1 \times 1$, убрали несколько кубиков. Осталась одна фигура из 22 кубиков. Из какого наибольшего числа квадратиков может состоять поверхность такой фигуры?

Подготовительное занятие. Указания, ответы и решения

Данное занятие продолжает геометрический блок задач. Его цели — не только вспомнить, что такое объем и площадь поверхности, но и порисовать объёмные фигуры из кубиков.

Для достижения цели «порисовать» удобно договориться с учениками, что они изображают кубик на листе клетчатой бумаги так, как показано на рисунке справа (передняя грань — квадрат размером 3 клетки на 3 клетки).



Первый блок — вводные задачи, которые можно дать в начале занятия.

- Куб со стороной 1 м распилили на кубики со стороной 1 см и положили их в ряд (по прямой). Какой длины оказался ряд?

  Ответ: 10 км.

  Решение. Объем куба равен 100 × 100 × 100 = 1000000 см^3, значит, длина ряда будет равна или 1000000 см = 10000 м = 10 км.

- Сколько кубиков надо добавить к фигуре, изображенной на рисунке 1, чтобы получилась фигура, изображенная на рисунке 2?

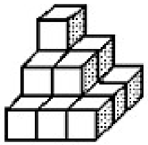
  

  Рис. 1

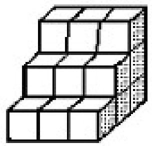
  

  Рис. 2

  Ответ: 4.

  Решение. Можно внимательно посчитать, сколько кубиков нужно добавить к первой фигуре.

  Также можно сосчитать количество кубиков в первой и во второй фигуре и найти разность: (9 + 6 + 3) – (9 + 4 + 1) = 18 – 14 = 4 кубика.

- Когда Гулливер попал в Лилипутию, он обнаружил, что там все вещи ровно в 12 раз короче, чем на его родине. Сможете ли вы сказать, сколько лилипутских спичечных коробков поместится в спичечный коробок Гулливера?

  Ответ: 1 728 коробков.

  Решение. В спичечном коробке Гулливера должно помещаться 12 лилипутских коробков в ширину, 12 — в длину и 12 — в высоту. Всего 12 · 12 · 12 = 1 728 коробков.

Второй блок — задачи для самостоятельного решения.

1. (а) Нарисуйте куб 3 × 3 × 3. Из скольких кубиков он состоит? Из скольких квадратиков состоит его поверхность?

   (б) Нарисуйте куб 3 × 3 × 3 без одного углового кубика.

   (в) Нарисуйте куб 3 × 3 × 3 без всех угловых кубиков. Из скольких кубиков состоит такая фигура? Из скольких квадратиков состоит её поверхность?

   (а) Ответ: 27 кубиков, 54 квадратика.

   Решение. Рисунок показан ниже. Количество кубиков равно объему, то есть 3 · 3 · 3 = 27. Каждая из 6 граней состоит из 3 · 3 = 9 квадратиков. Значит, на поверхности куба 6 · 9 = 54 квадратика.

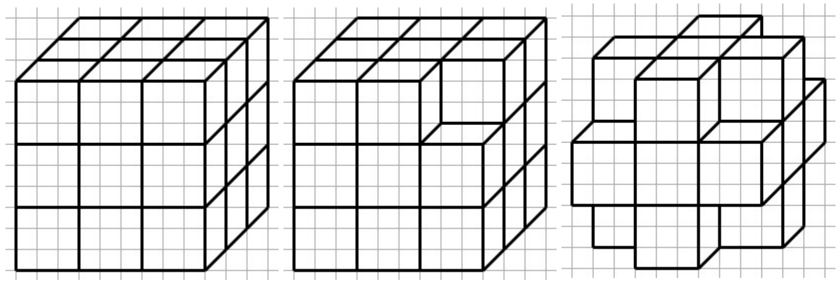
   (б) Решение. Рисунок показан ниже.

   (в) Ответ: 19 кубиков, 54 квадратика.

   Решение. Рисунок показан ниже. Около каждой из 8 вершин куба убрали кубик. Значит, осталось 27 – 8 = 19 кубиков.

   На каждой из шести граней куба осталось по 5 квадратиков, около каждой из 8 вершин в углублении 3 квадратика. Значит, всего 6 · 5 + 8 · 3 = 30 + 24 = 54 квадратиков.

   Можно не заниматься прямым подсчётом, а понять, как изменялось число квадратиков. Если убирать угловой кубик, но количество квадратиков на поверхности не меняется — пропали три квадратика, но три возникли. Значит, на поверхности осталось то же число квадратиков, то есть 54 квадратика.

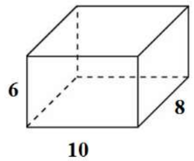
   

   Комментарий. Рекомендуем внимательно отнестись к этим задачам. Здесь важно многое. (1) Важно всё нарисовать. Нужно внимательно проверять рисунок для пункта (в), давая возможность исправлять неверные варианты. (2) Важно, чтобы ученики поняли взаимосвязь пунктов — без (б) сложно нарисовать (в), в (в) удобно считать нужное, опираясь на результаты пункта (а). (3) В пункте (в) важная и, в данном случае, естественная идея: можно не считать с нуля, а следить за изменением числа квадратиков на поверхности.

2. Брусок 10 × 8 × 6 разрезали на кубики 1 × 1 × 1. Какова суммарная площадь разрезов?

   Ответ: 1252.

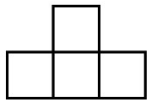
Решение 1 (Режем). Будем резать наш брусок по слоям.
Делаем вертикальные разрезы, их будет $10 - 1 = 9$ и площадь каждого разреза получится $6 \cdot 8 = 48$.
Режем по горизонтали: $6 - 1 = 5$ разрезов по $10 \cdot 8 = 80$.
Остались боковые разрезы: $8 - 1 = 7$ по $6 \cdot 10 = 60$.
Всего получилось $9 \cdot 48 + 5 \cdot 80 + 7 \cdot 60 = 1\,252$.



Решение 2 (Площадь поверхности). Осталось $10 \cdot 8 \cdot 6 = 480$ кубиков $1 \times 1 \times 1$. У них $480 \cdot 6 = 2\,880$ граней. Площадь поверхности начального бруска равна $2 \cdot (10 \cdot 8 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 10) = 376$ — по такому количеству граней кубиков разрезы не прошли. Они прошли по остальным $2\,880 - 376 = 2504$ граням. Так как разрез проходит сразу по двум граням, суммарная площадь разрезов равна $2504 : 2 = 1\,252$.

Комментарий. Первое решение естественное, а второе очень полезное для понимания. Рекомендуем при разборе задач рассмотреть оба способа.

3. Для награждения биатлонистов мастер собрал пьедестал из четырёх кубиков со стороной 40 см и покрасил его белой краской. А потом поступил заказ на пьедестал из кубиков со стороной 60 см для награждения тяжелоатлетов. Сколько грамм краски понадобится мастеру для покраски нового пьедестала, если на покраску пьедестала для биатлонистов ушло 400 грамм?



Ответ: 900 грамм.

Решение 1. Поверхность пьедестала состоит из 18 квадратиков. Площадь поверхности первого пьедестала равна $18 \cdot 40 \cdot 40 = 28\,800$ см². Площадь поверхности второго пьедестала равна $18 \cdot 60 \cdot 60 = 64\,800$ см².
Так как $64\,800 : 28\,800 = 2{,}25$, то потребуется в 2,25 раза больше краски, то есть $400 \cdot 2{,}25 = 900$ грамм.

Решение 2. Заметим, что не обязательно знать форму пьедестала. Достаточно понимать, что они одинаково собраны из кубиков. Площадь поверхность отличается во столько раз, во сколько раз отличаются площади граней кубиков.
В данном случае, $(60 \cdot 60) : (40 \cdot 40) = 2{,}25$. Значит, потребуется в 2,25 раза больше краски, то есть $400 \cdot 2{,}25 = 900$ грамм.

4. У Вани есть 12 одинаковых кубиков. Он складывает из них параллелепипеды и считает у каждого площадь поверхности. Какое наибольшее значение могло получиться у Вани, если площадь поверхности одного кубика равна 24?

Ответ: 200.

Решение. Площадь одной стороны кубика равна $24 : 6 = 4$.
Рассмотрим все варианты параллелепипедов, которые могли получиться.

(1) $12 \times 1 \times 1$: площадь поверхности $4 \cdot 2 \cdot (12 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 12) = 200$.
(2) $6 \times 2 \times 1$: площадь поверхности $4 \cdot 2 \cdot (6 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 6) = 160$.
(3) $4 \times 3 \times 1$: площадь поверхности $4 \cdot 2 \cdot (4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4) = 152$.
(4) $2 \times 2 \times 3$: площадь поверхности $4 \cdot 2 \cdot (2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 2) = 128$.
Наибольшая площадь — 200.

Указание 1. Полезно научиться перечислять все возможные параллелепипеды.

Указание 2. Заметьте, что наименьшая поверхность у того параллелепипеда, что ближе всего к кубу, наибольшую имеет наиболее вытянутый. Когда-нибудь ученики научатся это доказывать в общем виде.

5. Мама купила кускового сахара. Дети сначала съели верхний слой — 77 кусков, затем боковой слой — 55 кусков, наконец, передний слой. Сколько кусочков сахара осталось в коробке?

Ответ: 300.

Решение. Граница между верхним и боковым слоем — общий делитель 77 и 55, то есть 11. Значит, размеры пачки $7 \times 6 \times 11$. Осталось $6 \times 5 \times 10$ или 300 кусочков.

6. Имеется три деревянных куба. Длина ребра одного куба равна 1 м, другого — 2 м, третьего — 3 м. На покраску малого куба надо на 672 г краски меньше, нежели на окраску среднего куба. Сколько граммов краски надо на окраску большого куба?

Ответ: 2016 грамм.

Решение. Площади поверхностей кубов равны 6 м², 24 м² и 54 м². Из условия, на окраску $(24 - 6) = 18$ м² требуется 672 грамм краски. Так как $54 : 18 = 3$, то на окраску большого куба нужно $3 \cdot 672 = 2016$ грамм краски.

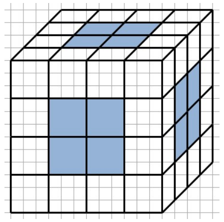
7. Деревянный куб покрасили снаружи белой краской, каждое его ребро разделили на 5 равных частей, после чего куб распилили так, что получились маленькие кубики, у которых ребро в 5 раз меньше, чем у исходного куба. Сколько получилось маленьких кубиков, у которых окрашена хотя бы одна грань?

Ответ: 98.

Решение. Количество маленьких кубиков, полученных после распиливания большого куба, равно $5^3 = 125$. Подсчитаем число кубиков, у которых не окрашено ни одной грани. Неокрашенными оказались все кубики, не имеющие ни одной видимой снаружи грани. Эти кубики образуют куб $3 \times 3 \times 3$, и их число равно $33 = 27$. Окончательно, число кубиков, у которых окрашена хотя бы одна грань, равно $125 - 27 = 98$.

8. Деревянный куб $N \times N \times N$ составили из кубиков $1 \times 1 \times 1$. Затем его снаружи покрасили белой краской. Оказалось, что кубиков, у которых окрашена ровно одна грань, столько же, сколько кубиков, у которых не окрашена ни одна из граней. Найдите N.

Ответ: 8.



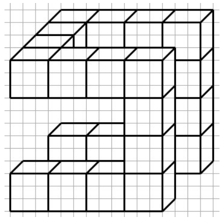
Решение. Кубики, у которых окрашена ровно одна грань, образуют шесть (по одному на каждой грани) блоков размером $K \times K \times 1$, где K на 2 меньше, чем N. Такие блоки, для примера, закрашены на рисунке справа на кубе $4 \times 4 \times 4$.

Кубики, у которых не окрашена ни одна из граней, образуют куб $K \times K \times K$. Такой куб можно составить только из 6 таких блоков. Значит, $K = 6$, $N = K + 2 = 8$.

9. И куба $4 \times 4 \times 4$, составленного из кубиков $1 \times 1 \times 1$, убрали несколько кубиков. Осталась одна фигура из 22 кубиков. Из какого наибольшего числа квадратиков может состоять поверхность такой фигуры?

Указание к условию. «Осталась одна фигура» — значит, от любого кубика фигуры можно дойти до любого другого, перемещаясь внутри кубиков, проходя через общие грани.

Ответ: 90.



Решение. Получить фигуру из 22 кубиков можно приклеиванием по очереди кубиков: второй приклеим к первому, третий — к первому или второму, и так далее. При каждом приклеивании пропадёт «внутри фигуры» два квадратика с поверхности кубиков. Нужно приклеить минимум 21 раз. Значит, на поверхности останется не более

$$22 \cdot 6 - 21 \cdot 2 = 120 + 12 - 42 = 90 \text{ кубиков.}$$

Пример такой фигуры показан на рисунке (он далеко не единственный).

Комментарий. Перед обсуждением решения этой задачи можно поиграть с учениками: ребята предлагают разные фигуры из 22 кубиков, получаемые из куба $4 \times 4 \times 4$, у каждой ищется площадь поверхности. Молодец тот, у кого больше поверхность. Здесь полезно не только искать фигуры, но и рисовать их.