

Блок 8. Логика: рыцари и лжецы

Подготовительное занятие

Задания

- (а) Может ли житель Острова сделать признание «Я лжец»? (б) Островитянин Глеб сказал: «Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!» Кем является Глеб — рыцарем или лжецом?
 - Житель Острова сказал: «Или я лжец, или $2+2=5$ ». Кто он, рыцарь или лжец?
 - У лжеца 5 соседей. Он говорит: «Среди моих соседей есть 3 лжеца». Сколько рыцарей может быть среди его соседей?
 - Как-то раз встретились два островитянина Антон и Борис. Антон сказал Борису: «По крайней мере, один из нас — лжец». Кем является Антон и кем является Борис?
1. На Острове есть развилка двух дорог, одна из которых ведёт в город Р, где живут все рыцари, а другая ведёт в город Л, где живут все лжецы. На развилке спросили местного жителя: «Правая дорога ведёт в твой родной город?» Как по ответу местного жителя узнать, по какой дороге идти в город Р?
 2. Встретились два островитянина Виктор и Герман. Виктор сказал: «По крайней мере, один из нас — рыцарь». На что Герман ответил: «Ты то уж точно — лжец!». Кем является Виктор и кем является Герман?
 3. Встретились как-то Дима и Даня, два жителя Острова. Дима сказал Дане: «Ты можешь сказать, что я рыцарь». На это Даня ответил Диме: «Ты можешь сказать, что я лжец». Кем является Дима и кем является Даня?
 4. Как-то путешественник встретил троих жителей Острова и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий житель Острова?
 5. В комнате собрались 12 жителей острова. Первый сказал: «Здесь нет ни одного честного человека»; второй сказал: «Здесь не более одного честного человека»; третий сказал: «Здесь не более двух честных человек»; и так далее; 12-й житель сказал: «Честных людей в комнате не более одиннадцати». Сколько же в комнате рыцарей?
 6. На Острове 10 жителей выстроились в очередь. Каждый из них, кроме первого и последнего, произнес фразу «Передо мной стоит соплеменник того, кто стоит позади меня». Сколько рыцарей может стоять в очереди?

7. Посёлок на острове представляет из себя клетки квадрата 4×4 , в каждой клетке живёт по одному жителю. В некоторый момент каждый из них произнес: «Во всех соседних (по стороне) со мной клетках живут лжецы».
 - (а) Приведите пример, как такое бывает.
 - (б) Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди них?
 - (в) Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди них?
 - (г) Сколько рыцарей могло жить в таком посёлке?



Указания, ответы и решения

Предлагаем занятие по теме «Логика», на котором будут предлагаться задачи про рыцарей и лжецов. Напомним, что в таких заданиях рыцарем считается герой, все утверждения которого являются верными, лжецом — тот, у которого все утверждения ложны.

Во всех задачах события происходят на Острове, где каждый либо рыцарь, либо лжец.

В начале занятия можно предложить вопросы, на которые ученики найдут ответы самостоятельно. Обсуждение решений этих заданий продемонстрирует основные приёмы для решения дальнейших задач.

Полезно научиться не только делать правильные выводы, но и перечислять, перебирать возможные случаи. Поэтому, к некоторым задачам приводятся разные решения.

- (а) Может ли житель Острова сделать признание «Я лжец»?

Ответ: не может.

Решение. Он не может быть ни рыцарем, ни лжецом: если он рыцарь, то он солгал, если он лжец, то он сказал правду.

- (б) Островитянин Глеб сказал: «Вчера мой сосед заявил мне, что он лжец!» Кем является Глеб — рыцарем или лжецом?

Ответ: лжецом.

Решение. Исходя из пункта (а), сосед не мог такого сказать. Значит, Глеб — лжец.

- Житель Острова сказал: «Или я лжец, или $2+2=5$ ». Кто он, рыцарь или лжец?

Ответ: лжец.

Решение. Утверждение « $2+2=5$ » ложно. Если житель рыцарь, то он сказал «или ложь, или ложь», то есть ложь. Если житель лжец, то он сказал «или правда, или ложь», что может быть ложью. Значит, этот житель лжец.

- У лжеца 5 соседей. Он говорит: «Среди моих соседей есть 3 лжеца». Сколько рыцарей может быть среди его соседей?

Ответ: 3, 4 или 5.

Решение. Утверждение, что лжецов 3 или больше, неправда. Значит, лжецов 2 или меньше. Тогда рыцарей 3, 4 или 5.

- Как-то раз встретились два островитянина Антон и Борис. Антон сказал Борису: «По крайней мере, один из нас — лжец». Кем является Антон и кем является Борис?

Ответ: Антон — рыцарь, Борис — лжец.



Решение (рассуждения). Отрицанием к утверждению «по крайней мере, один из нас — лжец» является «мы оба рыцари». Поэтому, если Антон солгал, то он и Борис — рыцари. Противоречие. Значит, Антон рыцарь.

Если Антон рыцарь, а утверждение «По крайней мере, один из нас — лжец» правдиво, то Борис — лжец.

Решение (все случаи). Рассмотрим все случаи, когда Антон и Борис являются рыцарями или лжецами. Для каждого случая рассмотрим, верно ли сказанное в условии утверждение или неверно.

Составим таблицу.

	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4
Антон	Рыцарь	Рыцарь	Лжец	Лжец
Борис	Рыцарь	Лжец	Рыцарь	Лжец
Фраза	Не правда	Правда	Правда	Правда

В первом, третьем и четвёртом столбцах фраза противоречит роли Антона. Поэтому возможен только случай 2.

Комментарий. Рекомендуем обсудить оба способа решения задачи. Если случаев в задаче немного, то сводить решение к перебору этих случаев — залог того, что рассуждения верны.

Задачи для самостоятельного решения.

1. На Острове есть развилка двух дорог, одна из которых ведёт в город Р, где живут все рыцари, а другая ведёт в город Л, где живут все лжецы. На развилке спросили местного жителя: «Правая дорога ведёт в твой родной город?» Как по ответу местного жителя узнать, по какой дороге идти в город Р?

Ответ: если ответ «да», то в город Р ведёт правая дорога, если ответ «нет», то в город Р ведёт левая дорога.

Решение. Если отвечающий — рыцарь (житель города Р), то его ответ «да» означает, что в город Р ведёт правая дорога, а ответ «нет» — что левая.

Если отвечающий — лжец (житель города Л), то его ответ «да» также означает, что в город Р ведёт правая дорога, а ответ «нет» — что левая.

Таким образом, в обоих случаях ответ «да» означает, что правая дорога ведёт в город Р, и ответ «нет» — что в город Л.

Комментарий. Обратите внимание, что при этом останется неизвестно, кем является местный житель, рыцарем или лжецом. Обсудите, какой вопрос можно задать местному жителю, чтобы узнать, рыцарь он или лжец?

Можно задать вопрос, ответ на который заведомо известен ответ. Например, «ты стоишь на земле?» или «Ты крокодил?».

2. Встретились два островитянина Виктор и Герман. Виктор сказал: «По крайней мере, один из нас — рыцарь». На что Герман ответил: «Ты то уж точно — лжец!». Кем является Виктор и кем является Герман?

Ответ: Виктор — рыцарь, Герман — лжец.

Решение (все случаи). Аналогично задаче, разобранный выше, составим таблицу.

	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4
Виктор	Рыцарь	Рыцарь	Лжец	Лжец
Герман	Рыцарь	Лжец	Рыцарь	Лжец
Фраза Виктора	Правда	Правда	Правда	Не правда
Фраза Германа	Не правда	Не правда	Правда	Правда

В первом, третьем и четвёртом столбцах фразы противоречат ролям героев, возможен только случай 2.

3. Встретились как-то Дима и Даня, два жителя Острова. Дима сказал Дане: «Ты можешь сказать, что я рыцарь». На это Даня ответил Диме: «Ты можешь сказать, что я лжец». Кем является Дима и кем является Даня?

Ответ: Дима лжец, а Даня рыцарь.

Решение. (1) Если Дима рыцарь, то Даня может сказать правду. Значит, Даня также рыцарь, тогда он не мог сказать свою фразу.

(2) Если Дима лжец, то Даня не может назвать его рыцарем. Значит, Даня — рыцарь. Его фраза является верной.

4. Как-то путешественник встретил троих жителей Острова и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий житель Острова?

Ответ: «один».

Решение (рассуждения). Если первый житель рыцарь, то остальные двое лжецы. Такое невозможно, так как второй в этом случае сказал правду.

Тогда первый житель лжец. Если второй житель — лжец, то в силу его слов третий тоже лжец. Тогда первый сказал правду — противоречие. Значит, второй житель рыцарь. В силу его слов третий житель тоже рыцарь. Он должен сказать правду, то есть дать ответ «один».

Комментарий. Сколько всего возможных распределений ролей среди троих жителей? Ответ: $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$. Можно выписать все ситуации и проверить каждую.

5. В комнате собрались 12 жителей острова. Первый сказал: «Здесь нет ни одного честного человека»; второй сказал: «Здесь не более одного честного человека»; третий сказал: «Здесь не более двух честных человек»; и так далее; 12-ый житель сказал: «Честных людей в комнате не более одиннадцати». Сколько же в комнате рыцарей?

Ответ: 6.

Решение. Первый житель, очевидно, солгал. Значит, 12-ый житель сказал правду, так как первый житель — лжец, а рыцари — кто-то из 11-ти остальных.

Изобразим условие таблицей: каждый столбец соответствует жителю, в первой строке утверждение жителя (где Р — количество рыцарей), во второй — его роль (рыцарь или лжец).

P=0	P≤1	P≤2	P≤3	P≤4	P≤5	P≤6	P≤7	P≤8	P≤9	P≤10	P≤11
Л											Р

Заметим, что второй житель не мог сказать правду, иначе рыцарей будет по крайней мере двое и его утверждение станет неверным. Тогда прав предпоследний житель (он рыцарь).

P=0	P≤1	P≤2	P≤3	P≤4	P≤5	P≤6	P≤7	P≤8	P≤9	P≤10	P≤11
Л	Л									Р	Р

Повторяя рассуждения про крайние незаполненные клетки, получаем результат:

P=0	P≤1	P≤2	P≤3	P≤4	P≤5	P≤6	P≤7	P≤8	P≤9	P≤10	P≤11
Л	Л	Л	Л	Л	Л	Р	Р	Р	Р	Р	Р

Значит, в комнате 6 рыцарей.

6. На Острове 10 жителей выстроились в очередь. Каждый из них, кроме первого и последнего, произнес фразу «Передо мной стоит соплеменник того, кто стоит позади меня». Сколько рыцарей может стоять в очереди?

Ответ: 3, 4 или 10 рыцарей.

Подсказка. Если известно, кто стоит в очереди на первых двух местах, то однозначно определяется, из какого племени каждый из остальных жителей.

Решение. Предположим, известно, из какого племени двое стоящих рядом. Тогда однозначно определяется следующий за ними:

Р-Р → Р, Р-Л → Л, Л-Р → Л, Л-Л → Р.

Следуя этим правилам, можно восстановить каждый из 4 случаев до конца:

- (1) Р-Р-Р-Р-Р-Р-Р-Р-Р-Р (всего 10 рыцарей),
- (2) Р-Л-Л-Р-Л-Л-Р-Л-Л-Р (всего 4 рыцаря),
- (3) Л-Р-Л-Л-Р-Л-Л-Р-Л-Л (всего 3 рыцаря),
- (4) Л-Л-Р-Л-Л-Р-Л-Л-Р-Л (всего 3 рыцаря).

7. Посёлок на острове представляет из себя клетки квадрата 4×4 , в каждой клетке живёт по одному жителю. В некоторый момент каждый из них произнес: «Во всех соседних (по стороне) со мной клетках живут лжецы».

(а) Приведите пример, как такое бывает.

(б) Какое наибольшее количество рыцарей могло быть среди них?

(в) Какое наибольшее количество лжецов могло быть среди них?

(г) Сколько рыцарей могло жить в таком посёлке?

(а) Ответ: примеры расположений показаны ниже.

Л	Л	Р	Л
Р	Л	Л	Л
Л	Л	Л	Р
Л	Р	Л	Л

4 рыцаря

Л	Р	Л	Л
Р	Л	Л	Р
Л	Р	Л	Л
Р	Л	Р	Л

6 рыцарей

Р	Л	Л	Р
Л	Р	Л	Л
Р	Л	Р	Л
Л	Р	Л	Р

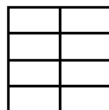
7 рыцарей

Л	Р	Л	Р
Р	Л	Р	Л
Л	Р	Л	Р
Р	Л	Р	Л

8 рыцарей

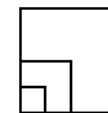
(б) Ответ: 8 рыцарей.

Решение. Заметим, что в каждой паре соседних по стороне клеток живёт не более одного рыцаря. Разобьём доску на 8 таких пар, не налегающих друг на друга (рисунок справа).



(в) Ответ: 12 лжецов.

Решение. Рассмотрим любой угловой квадрат 2×2 и в нём угловую клетку квадрата 4×4 (рисунок справа). Если в клетке живёт лжец, то в какой-то соседней клетке должен жить рыцарь (иначе он будет утверждать правду, что вокруг него все лжецы). Вывод: в таком квадрате 2×2 живёт хотя бы один рыцарь.

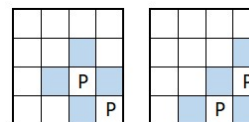


Так как можно рассмотреть 4 таких непересекающихся квадрата 2×2 , то в них в сумме наберется 4 рыцаря. С другой стороны, выше показан пример, когда рыцарей ровно четверо. Значит, максимальное число лжецов равно $16 - 4 = 12$.

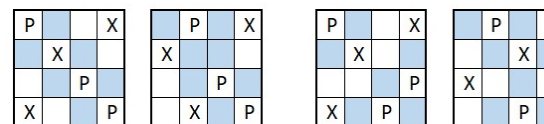
(г) Ответ: 4, 6, 7 или 8 рыцарей.

Решение. Из результатов пунктов (б) и (в) следует, что рыцарей не менее 4 и не более 8. Примеры на 4, 6, 7 и 8 рыцарей приведены выше.

Можно показать перебором, что невозможно расположить 5 рыцарей. Предположим, что 5 рыцарей как-то поставили. Разделим доску на 4 части 2×2 . В каждой из них должен быть рыцарь (это обосновано выше). В одной из них будет 2 рыцаря (пусть это правая нижняя часть). Рыцари не могут стоять в соседних клетках. Поэтому их расположение одно из двух, показанных на рисунке. Закрашены клетки, где не могут жить рыцари.



Либо в левая верхней клетке живёт рыцарь, либо он живёт в соседней клетке. Таким образом достаточно рассмотреть 4 варианта, они показаны на рисунках ниже.



В каждом из них крестиками отмечены 3 клетки, которые надо «обеспечить» (то есть поставить рыцаря в них или в соседнюю клетку) своими рыцарями. Значит, необходимо по крайней мере 6 рыцарей.

Комментарий. Данная задача, разбитая на пункты, даёт возможность исследовать ситуацию почти целиком. Не нужно лишать учеников удовольствия поискать разные расположения рыцарей и лжецов на поле.