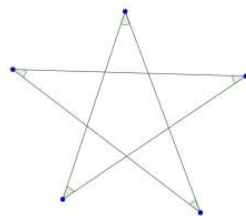


Блок 5. Геометрия. Подсчёт углов

Подготовительное занятие

Задания

1. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M . Оказалось, что, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$, $BM = AB$. Найдите углы треугольника ABC .
2. Дан треугольник ABC , $\angle B = 73^\circ$, $\angle C = 43^\circ$. Провели высоту AH и биссектрису AL . Какая точка ближе к вершине B : H или L ?
3. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A , равным 36° , проведена биссектриса BK . Докажите, что $BK = BC$.
4. Дан треугольник ABC , $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 48^\circ$. Найдите угол между медианой и высотой, опущенными из вершины B .
5. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75° . Определите угол при основании треугольника.
6. Найдите сумму углов пятиконечной звезды, указанных на рисунке (эти углы не обязательно равны).
7. Дан треугольник ABC , $\angle A = 80^\circ$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C треугольника.
8. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = BC = CD$, лучи AB и DC пересекаются в точке O , $\angle BOC = 80^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

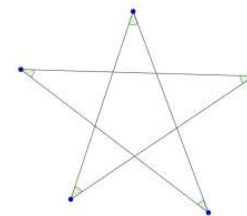


Блок 5. Геометрия. Подсчёт углов

Подготовительное занятие

Задания

1. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M . Оказалось, что, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$, $BM = AB$. Найдите углы треугольника ABC .
2. Дан треугольник ABC , $\angle B = 73^\circ$, $\angle C = 43^\circ$. Провели высоту AH и биссектрису AL . Какая точка ближе к вершине B : H или L ?
3. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A , равным 36° , проведена биссектриса BK . Докажите, что $BK = BC$.
4. Дан треугольник ABC , $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 48^\circ$. Найдите угол между медианой и высотой, опущенными из вершины B .
5. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75° . Определите угол при основании треугольника.
6. Найдите сумму углов пятиконечной звезды, указанных на рисунке (эти углы не обязательно равны).
7. Дан треугольник ABC , $\angle A = 80^\circ$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C треугольника.
8. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = BC = CD$, лучи AB и DC пересекаются в точке O , $\angle BOC = 80^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.



Указания, ответы и решения

Занятие посвящено геометрическим задачам, в которых идёт подсчёт углов треугольников.

Одна из целей занятия — вспомнить факты школьной программы: теоремы о сумме углов треугольника, теорему о величине внешнего угла треугольника, признаки и свойства равнобедренных треугольников. В задаче № 4 используется свойство медианы прямоугольного треугольника, проведенной к гипотенузе.

Другая цель — продемонстрировать ученикам, что при решении полезно искать величины даже тех углов, о которых не говорится в условии, а также выражать величины углов, вводя переменные.

1. На стороне BC треугольника ABC отметили точку M . Оказалось, что, $\angle BAM = 35^\circ$, $\angle CAM = 15^\circ$, $BM = AB$. Найдите углы треугольника ABC .

Ответ: 50° , 110° , 20° .

Решение. (1) Из условия $\angle A = 15^\circ + 35^\circ = 50^\circ$.

(2) Треугольник ABM — равнобедренный, поэтому $\angle BMA = \angle BAM = 35^\circ$.

Из суммы углов треугольника ABM имеем

$$\angle B = \angle ABM = 180^\circ - 35^\circ - 35^\circ = 110^\circ.$$

(3) Из суммы углов треугольника ABC имеем

$$\angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 50^\circ - 110^\circ = 20^\circ.$$

2. Дан треугольник ABC , $\angle B = 73^\circ$, $\angle C = 43^\circ$. Провели высоту AH и биссектрису AL . Какая точка ближе к вершине B : H или L ?

Ответ: точка H ближе.

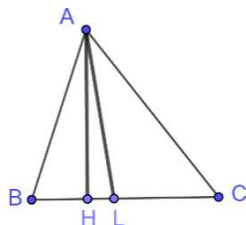
Указание. Как определить, какая точка ближе? Найдём углы $\angle BAH$ и $\angle BAL$, меньшему углу соответствует ближайшая точка.

Решение. Из суммы углов треугольника ABC имеем $\angle BAC = 180^\circ - 73^\circ - 43^\circ = 64^\circ$. Так как AL — биссектриса, то $\angle BAL = \angle BAC : 2 = 64^\circ : 2 = 32^\circ$.

Из суммы углов треугольника ABH имеем $\angle BAH = 180^\circ - 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ$.

Так как $\angle BAL > \angle BAH$, то точка H ближе к точке B , нежели точка L .

Комментарий. Можно доказать, что если $\angle B > \angle C$, то к вершине B точка H ближе, нежели точка L . Данный треугольник — остроугольный, точки H и L лежат на стороне BC . Если L ближе, то угол $\angle ALB$ тупой, если дальше, то угол $\angle ALB$ острый. Суммы углов треугольников $\angle ALB$ и $\angle ALC$ равны, то есть



$$\angle BAL + \angle ABL + \angle ALB = \angle CAL + \angle ACL + \angle ALC.$$

Заметим, что $\angle BAL > \angle BAH$, $\angle BAL = \angle CAL$. Значит, $\angle ALB < \angle ALC$. Так как $\angle ALB + \angle ALC = 180^\circ$, то $\angle ALB$ — острый. Значит, к вершине B ближе точка H , нежели точка L .

3. В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине A , равным 36° , проведена биссектриса BK . Докажите, что $BK = BC$.

Указание. Полезно найти величины тех углов, которые можно посчитать, а затем изучить результаты и сделать полезные выводы.

Решение. Углы при основании данного треугольника равны $(180^\circ - 36^\circ) : 2 = 72^\circ$. Значит, $\angle KBA = \angle KBC = 36^\circ$. Из суммы углов треугольника BCK получаем $\angle BKC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$.

Теперь заметим, что треугольник ABK — равнобедренный ($\angle KBA = \angle KAB = 36^\circ$) и треугольник BCK — равнобедренный ($\angle BKC = \angle C = 72^\circ$). Значит, $BC = BK = KA$.

4. Дан треугольник ABC , $\angle B = 90^\circ$, $\angle A = 48^\circ$. Найдите угол между медианой и высотой, опущенными из вершины B .

Ответ: 6° .

Решение. Пусть BH — медиана, BM — медиана. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы. Поэтому, треугольник ABM равнобедренный, $\angle A = 48^\circ$, $\angle BMA = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ$.

Из суммы углов прямоугольного треугольника ABC следует, что $\angle AMB = 90^\circ - \angle BMA = 90^\circ - 84^\circ = 6^\circ$.

5. Биссектриса угла равнобедренного треугольника образует с противоположной стороной угол 75° . Определите угол при основании треугольника.

Ответ: 50° или 70° .

Решение. (1) Дан равнобедренный треугольник. Если биссектриса проведена к основанию, то она является высотой, то есть не может образовывать со стороной угол 75° . Значит, указанная биссектриса проведена к боковой стороне.

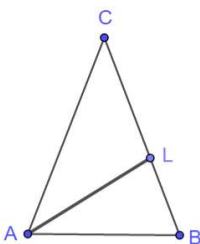
(2) Пусть дан треугольник ABC , $AC = CB$, AL — данная биссектриса, $\angle BAL = \angle LAC = \alpha$. Тогда, $\angle B = 2\alpha$. Биссектриса образует с BC угол $\angle BLA = 180^\circ - \alpha - 2\alpha = 180^\circ - 3\alpha$ или смежный с ним $\angle CLA = 3\alpha$.

Если $\angle BLA = 75^\circ$, то $180^\circ - 3\alpha = 75^\circ$, $\alpha = 35^\circ$.

Если $\angle CLA = 75^\circ$, то $\alpha = 25^\circ$.

В первом случае угол при основании равен $2\alpha = 70^\circ$, во втором — $2\alpha = 50^\circ$.

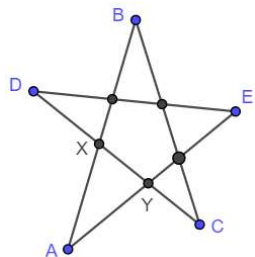
Комментарий. Обратите внимание учеников, что при решении удобно ввести переменную.



6. Найдите сумму углов пятиконечной звезды, указанных на рисунке (эти углы не обязательно равны).

Ответ: 180° .

Решение. Введем обозначения, как показано на рисунке:



Заметим, что $\angle XAY = \angle B + \angle C$, так как $\angle XAY$ — внешний для треугольника BCX . Также $\angle AYX = \angle D + \angle E$, так как $\angle AYX$ — внешний для треугольника DEY .

Тогда из суммы углов треугольника AXY получаем:

$$180^\circ = \angle A + \angle XAY + \angle AYX = \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E.$$

7. Дан треугольник ABC , $\angle A = 80^\circ$. Найдите угол между биссектрисами углов B и C треугольника.

Ответ: 50° .

Решение. Пусть указанные биссектрисы пересекаются в точке I , $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$. Тогда из суммы углов треугольника ABC имеем $80^\circ + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, откуда $\beta + \gamma = 50^\circ$. Из суммы углов треугольника BCI имеем $\angle BIC + \beta + \gamma = 180^\circ$, откуда

$\angle BIC = 130^\circ$. Так как углом между прямыми считается тот, чья величина не более 90° , то угол между биссектрисами равен $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.

Комментарий (про решение). Задачу можно решить, введя одну переменную, например, величину угла B .

Комментарий (обобщение). Аналогично можно выразить угол BIC через величину угла A треугольника: $\angle BIC = 90^\circ + \angle A/2$. Обратите внимание, что это любопытный факт: угол между биссектрисами двух углов треугольника зависит только от третьего.

8. Дан четырехугольник $ABCD$, $AB = BC = CD$, лучи AB и DC пересекаются в точке O , $\angle BOC = 80^\circ$. Найдите угол между диагоналями четырехугольника.

Ответ: 50° .

Решение. Треугольники ACB и BCD — равнобедренные. Пусть $\angle BCA = \angle BAC = \alpha$, $\angle BDC = \angle CBD = \beta$. Угол OBC — внешний для треугольника ACB , значит $\angle OBC = 2\alpha$. Угол OCB — внешний для треугольника BCD , значит $\angle OCB = 2\beta$. Из суммы углов треугольника OBC имеем $2\alpha + 2\beta + 80^\circ = 180^\circ$, откуда $\alpha + \beta = 50^\circ$.

Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке N . Из суммы углов треугольника BNC имеем $\angle BNC = 180^\circ - \angle BCA - \angle CBD = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 130^\circ$. Угол между прямыми AC и BD равен $180^\circ - 130^\circ = 50^\circ$.